Cálculo 2

Sumário

Capítulo 1

Funções , Limites e Continuidade

1.1 Funções

1.1.1 Introdução ao conceito de funções

Em cálculo I estudamos funções reais com uma única variável. Isto é, imagine que você vai em um restaurante que cobra de acordo com o peso da comida e não pede nenhuma bebida. Neste caso, o preço da sua refeição só depende do peso da comida que você escolher. Pensando em termos matemáticos, dizemos que **o preço é função do peso** e formalizamos esta idéia dizendo que existe uma função com uma única variável (peso) que determina quanto vai ser pago pela refeição (preço). Neste caso o conjunto de todos os pesos possíveis será o domínio, e o conjunto de todos os preços possíveis será a imagem.

Exercício 1.1.1. Formalize a função descrita acima no formato:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & b \end{array}$$

Suponha, então, que além da comida você quer beber alguma coisa. Então, o preço do seu almoço passa a depender de *duas variáveis* . Você precisa levar em conta o peso da refeição e o valor da bebida. Neste caso, a sua despesa passará a ser calculada **em função de duas variáveis: refeição e bebida**. Dizemos, então, que o preço é função de duas variáveis. E teremos uma função com imagem em $\mathbb{R}$ (o preço) e domínio contido em $\mathbb{R}^2$, isto é: uma função real de duas variáveis.

Exercício 1.1.2. Formalize esta função nos mesmos termos do exercício 1.1.1.

Exercício 1.1.3. Para cada uma das situações abaixo, tente definir funções na forma do exercício 1.1.1

a) Você vai pagar a sua conta e a de um amigo. Qual será a sua despesa?

b) Você vai pagar a conta, a do amigo, e a gorjeta de 10%.

c) Você pagará a sua refeição , a do amigo, a gorjeta, mas tem um desconto de 15% da sua refeição .

Vamos pensar em uma outra situação . Imagine que a sua mÃ£e prometeu a você que para cada valor (em dinheiro) que você guardar por um mês, ela acrescenta 20%. Por outro lado, você precisa pagar uma dívida a um amigo e você se dispõe a pagar, por mês, 15% do que a sua mÃ£e te der. Observe que o dinheiro que você receberá da sua mÃ£e e a quantia mensal que pagará ao amigo são funções de uma única variável: a quantia poupada. Temos então uma função que depende de uma única grandeza. Conhecida esta grandeza, determinaremos dois valores. Dizemos então que temos uma **função vetorial de uma variável** ou seja, o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a imagem está contida em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 1.1.4. Descreva a função que representa a situação mencionada.

Lembre que uma função de uma variável é definida como:

Definição 1.1.1. Uma função é uma tripla $\{A, B, R\}$ oonde A e B são conjuntos e R é uma relação entre A e B tal que para cada elemento de A existe um único elemento de B na relação . O conjunto dos valores $b \in B$ tais que para algum $a \in A$, $(a, b) \in R$ é dito **Imagem** da função .

Em particular, quando $A = \mathbb{R}^n$ e $B = \mathbb{R}^m$ dizemos:

Definição 1.1.2. Uma função $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são três "objetos": um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ chamado de domínio, D_f, um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ chamado de contradomínio, C_f e uma regra que associa a cada elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$ do domínio, um único elemento do contradomínio, $y = f(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} f : D_f &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

para denotar a função .

Observação : Vamos convencionar que, quando uma função é dada por uma fórmula, seu domínio é o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual a regra faz sentido e vamos denotar esse conjunto por D_f.
Observação : Nestas notas, as letras maiÃºsculas X, Y, etc serÃ£o usadas, frequentemente, para designar elementos de um espaço $\mathbb{R}^n$ enquanto as letras minúsculas designam coordenadas. Assim, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemplo 1.1.1. $f(x, y) = x + y$. Assim, $D_f = \mathbb{R}^2$ e como $z = x + y$ é a equação do plano normal ao vetor (0,0,-1) e que contém a origem, a imagem é $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Assim, de novo, $D_f = \mathbb{R}^2$.

1.1.2 Gráficos, Conjuntos de nível, Representação Paramétrica

Já trabalhamos muito com gráficos de funções em cálculo 1, mas é preciso agora entender melhor o **conceito** de gráfico bem como de outros "desenhos"que podemos fazer em relação a uma determinada função .

Exercício 1.1.5. Considere a função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. [1] Pense com cuidado qual(is) das afirmações a seguir você diria que são verdadeiras:

a) A função é uma parábola.

b) 0 está no gráfico da função .

c) A imagem desta função é x^2.

c) $(1, 1)$ está no gráfico da função .

O item (a) é evidentemente falso, porque uma função é uma relação entre dois conjuntos e portanto nenhuma função pode ser uma parábola, já que a parábola é uma figura geométrica. Esta frase poderia ser comparada a algo como "Esta sala é um retângulo". Nenhuma sala pode ser um retângulo, apenas podemos representar uma sala, em uma planta baixa, por um retângulo. Em uma conversa informal, pode-se falar isso, mas para usar uma linguagem correta deveríamos dizer: a representação desta sala pode ser feita por um retângulo. A letra (b) está muito errada (adivinhe a razão !); a letra (c) está com-ple-ta-men-te errada porque imagem de função é conjunto, não fórmula e a letra (c) está correta.

O ponto fundamental aqui é lembrar o conceito de gráfico! **Um gráfico de função não é um desenho nem um esboço de qualquer coisa relacionada Ã função !!!!). É importante notar a definiÃ§Ã£o de grÃ¡fico e entendê-la bem.**

Definição 1.1.3. Um bf gráfico de uma função f é um subconjunto do produto cartesiano $dominio \times Imagem$ composto por pontos da forma (a, b) onde a é um ponto do domínio e $b = f(a)$.

Exemplo 1.1.3. Considere a função descrita pelo diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & \cap \\ \beta & \mapsto & \odot \\ \gamma & \mapsto & \diamond \\ \delta & \mapsto & \ominus \end{array}$$

O domínio desta função é o conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, e a imagem é o conjunto $\{\cap, \odot, \diamond, \ominus\}$. O gráfico será o conjunto dos pares; $\{(\alpha, \cap), (\beta, \odot), (\gamma, \diamond), (\delta, \ominus)\}$. Observe que o gráfico existe, embora você não possa representá-lo no plano cartesiano.

Exemplo 1.1.4. Suponha que A é o conjunto das cores primárias. Denomine por F a função que a cada par de cores primárias associa a cor formada pela sua combinação . Observe que o gráfico desta função será composto por triplas, por exemplo : (azul, amarelo, verde) ou (vermelho, vermelho, vermelho), etc. Cada uma destas triplas tra a informação (domínio, imagem). Precisamos de duas posição para o domínio e uma ára a imagem, de modo que necessitamos de três posição para representar um ponto do gráfico.

[1] observe que eu explicitei o domínio!!!. "Função "sem domínio não é função !!!!!

Exercício 1.1.6. Em um concurso de culinária com 5 participantes a organização disponibilizou quatro ingredientes salgados (batata, carne, frango e macarrão) e tres ingredientes doces: chocolate, leite condensado e geléia. Cada participante deve escolher dois ingredientes salgados, dois ingredientes doces e apresentar uma refeição com um prato salgado e uma sobremesa. Procure descrever esta função formalmente. Descreva o gráfico da função !!! Você pode imaginar, por exemplo, que batata com macarrão é um prato, geléia com leite condensado é uma sobremesa, frango com grango é um prato...

O que é muito importante em todos estes exemplos é se convencer de que toda função tem um gráfico e nem sempre este gráfico é representado através de um desenho.

Vamos trabalhar um pouco, agora, com funções com domínio em $\mathbb{R}^n$ e contra-domínio em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.1.5. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ descrita pela expressão $F(u, v) = u + v$. Um ponto do gráfico desta função , por exemplo, é $(2, 1, 3)$; outro ponto é $(-1, 1, 0)$. Todos os pontos do gráfico precisam de três coordenadas - duas para representar o domínio e uma para imagem. Assim poderíamos dizer que o gráfico desta função é o conjunto de pontos da forma (x, y, z) onde $z = x + y$. isto é, todos os pontos com três coordenadas em que a terceira é a soma das duas primeiras. Como cada ponto tem três coordenadas e cada uma delas é um valor real, podemos pensar em representar este gráfico em um desenho contendo três eixos. Existem muitas maneiras de pensar neste problema (e você deve tentar todas), mas observamos que $z - x - y = 0$ é a equação de um plano que contem a origem e tem vetor normal $(1, 1, 1)$ e portanto este plano é a representação do gráfico de F.

Exercício 1.1.7. `Tente descrever e fazer um esboço dos gráficos das funções :`

- `a)` $F(u, v) = 2u - v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$;
- `b)` $F(u, v) = u - 2v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
- `c)` $F(u, v) = 2u$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
- `d)` $F(u, v) = u^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

Exemplo 1.1.6. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ descrita pela expressão $F(u) = (u, u)$. Um ponto do gráfico desta função , por exemplo, é $(1, 1, 1)$ ou $(3, 3, 3)$. Em geral todos os pontos deste gráfico são da forma (x, x, x) onde x é um número real. Mais uma vez, temos um gráfico que é subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e podemos pensar em desenhar os pontos do gráfico. Tipicamente precissamos marcar todos os pontos que tenham três coordenadas iguais. mais uma vez sugerimos que você pense em muitas maneiras de resolver este problema. Indicamos aqui que todos os pontos são da forma $t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, o que nos permite desenhar uma reta com a direção do vetor $(1, 1, 1)$ e contendo a origem.

Exercício 1.1.8. `Tente descrever e fazer um esboço dos gráficos das funções :`

- `a)` $F(u) = (2u, -u)$, $u \in \mathbb{R}$;

- `b)` $F(u) = (u^2, u^2)$, $u \in \mathbb{R}$
- `c)` $F(u) = (u, \mathtt{sen}(u))$, $u \in \mathbb{R}$
- `d)` $F(u) = (u^2, u)$, $u \in \mathbb{R}$

Observe que os gráficos, em todos os casos estudados até agora, são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, porque a soma das dimensões do domínio e imagem dá 3. No entanto, enquanto no primeiro bloco de exemplos os gráficos eram representados por superfícies, no segundo eles eram representados por curvas. Tente muito, muito mesmo, com todas as suas forças, entender porque..

Vamos considerar agora algumas situações que envolvem dimensões maiores. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ descrita pela expressão $F(u, v, w) = 2u + v - w$.

Exemplo 1.1.7. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ descrita pela expressão $F(u, v, w) = 2u+v-w$. Um ponto do gráfico desta função é, por exemplo, $(1, 2, -1, 2)$ ou $(2, 3, 1, 6)$. Observe que agora os pontos do gráfico são representados por 4 coordenadas, o que não nos permite desenhá-los. No entanto, o gráfico existe e poderíamos descrevê-lo como o conjunto de pontos (x, y, z, s) tais que $s = 2x + y - z$. Tente entender porque eu estou usando símbolos distintos (letras) na definição da função e na descrição do gráfico !!! Isso faz sentido ou é bobagem de professor?

Exercício 1.1.9. `Tente descrever os gráficos das funções :`

- `a)` $F(u, v) = (2u, -u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$;
- `b)` $F(u) = (u^2, u^2, -3u, 2u)$, $u \in \mathbb{R}$
- `c)` $F(u, v, w) = (u, \mathtt{sen}(v), uv, w^2)$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$
- `d)` $F(u, v) = (u^2, u + v, u - v)$, $u, v \in \mathbb{R}$

Voltamos, agora, ao exemplo do restaurante a peso (exemplo 1.1.1). Considere o caso em que a pessoa quer uma refeição e uma bebida e precisa determinar sua despesa. Temos então o caso de uma função de duas variáveis com valores reais. Uma pergunta muito razoável é: considerando que o indivíduo dispõe de $R\$50,00$ quais as combinações de comida e bebida que ele pode fazer? Observe que existem inúmeras respostas para esta pergunta. essencialmente estamos fixando um valor na *Imagem* da função e determinando todos os pontos do Domínio cuja imagem terá este valor. Vamos imaginar que o indivíduo pode comer 300 gr e tomar uma cerveja, ou 200 gr. e bebr um vinho, ou 400 gr e uma água, etc. Todas estas possibilidades custariam cinquenta reais. Neste caso dizemos que os pares $(300, \text{cerveja})$, $(200, \text{vinho})$, $(400, \text{água})$ estão no **conjunto de nível 50** da função . Mais formalmente:

Definição 1.1.4. Se uma função f tem contradomínio em $\mathbb{R}$ **o conjunto de nível** k**,** $k \in \mathbb{R}$**, de** f, são todos os elementos do domínio de f cuja imagem Ã© k.

Exemplo 1.1.8. Suponha que você está organizando uma biblioteca e você quer classificar os livros de acordo com dois parâmetros: tipo (literatura, poesia, biografias, etc..) e idioma original da obra.Todos os livros com mesmo tipo e cujo idioma original seja o mesmo devem ficar na mesma estante. Podemos pensar em uma função que associa livros Ã estantes, de acordo com seu tipo e idioma. Mais uma vez, temos uma função de duas variáveis. Você pode olhar para a biblioteca organizada, escolher a terceira estante e verificar que ali estão todos os livros de poesia com autores de língua portuguesa. Este conjunto de livros será então o *conjunto de nível terceira estante* da função .

Exercício 1.1.10. `Você quer comprar calça, camisa e sapato para ir a uma festa. Evidentemente sua despesa será a soma do preço destas três peças. Procure descrever uma função que explicita esta dependência. Determine todas as possibilidades que você terá com` $R\$400,00$.`Em outras palavras, determine o conjunto de nível` 400 `desta função .`

Para determinar o conjunto de nível precisamos fixar um pont na imagem e verificar todos os pontos do domínio cuja imagem tem aquele valor. Neste curso só vamos nos preocupar com conjuntos de nível de funções reais de várias variáveis (o que é isso mesmo?) e definimos formalmente:

Definição 1.1.5. O conjunto de nível k, $k \in \mathbb{R}$ de uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é constituído por todos os pontos do domínio de F cuja imagem é k ou, mais sucinto: $X \in \mathbb{R}^n \in$ conjunto de nível k de $F sse F(X) = k$.

Exemplo 1.1.9. Considere $F(u,v) = 2u+v$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.Vamos determinar o conjunto de nível 1 desta função . Isto é: todos os pontos do domínio de F cuja imagem da 1. Queremos, assim, determinar todos os valores de u e v tais que $2u + v = 1$. Observe que isso é uma reta que poderia ser descrita pela equação $v = 1 - 2u$.Ou seja, coeficiente angular -2 contendo o ponto $(0,1)$. **é muito importante que você se convença que esta reta não é o gráfico desta função** . Esta reta é gráfico da função $g(x) = 1-2x$ que é uma função completamente diferente. Neste exemplo o gráfico de F é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e é representado por um plano !!!

Exercício 1.1.11. `determine o conjunto de nível` k `de cada uma das funções . Em cada caso, procure pensar também no gráfico da função e (eu imploro) convença-se de que são conjuntos com-ple-ta-men-te diferentes.`

`a)` $F(u,v) = 3u+v$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $k = 2$;

`b)` $F(u,v) = u^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $k = 9$;

`c)` $F(u,v) = u^2 + v^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,$k = 4$;

`d)` $F(u,v) = \texttt{sen} uv$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

`e)`

`c)` $F(u,v) = uv$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,$k = 1$;

`f)` $F(u,v) = u^2 + v^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,$k = 4$;

`g)` $F(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2$, $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$,$k = 4$;

`h)` $F(u,v,w) = u + v + w$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,$k = -1$;

Imagine que você está analisando o modo como uma formiga se move em cima de uma mesa. Ela certamente descreve uma curva. Você pode olhar no seu relógio a cada segundo e verificar sua posição . Temos então uma função cujo domínio é o tempo e a imagem é a posição da formiga na mesa. Se vc representar esta posição no plano cartesiano, verá um conjunto de pontos marcados. Observe que este conjunto **não é gráfico e muito menos conjunto de nível desta função** . Este conjunto é a imagem da função . Se você imaginar que o tempo está sendo medido continuamente e não a cada segundo) e a posição marcada a todo tempo, teremos uma função com domínio em $\mathbb{R}$, contradomínio em $\mathbb{R}^2$, gráfico em $\mathbb{R}^3$ e o que estamos desenhando é uma curva que é a imagem desta função . Dizemos que a função *parametriza* a curva.

Exemplo 1.1.10. Considere a função $f(u) = (u, u^2)$, $u \in \mathbb{R}$. Queremos analisar a imagem desta função . Observe que os pontos da imagem são todos os pares da forma (x, y) tais que $y = x^2$.Em outras palavras, a imagem desta função é uma parábola bastante conhecida. **a parábola não é o gráfico desta função !!!!**. Dizemos que f parametriza a parábola ou que a parábola é parametrizada por f.

Exercício 1.1.12. Descreva as curvas parametrizadas pelas funções a seguir:

- a) $f(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$;
- b) $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- c) $F(t) = (2t, 3t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
- d) $F(t) = (t^2, \mathrm{sen} t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- e) $F(t) = (t + 1, t - 1, t + 3)$, $t \in \mathbb{R}$.
- f) $F(t) = (t, \cos(t), \mathrm{sen}(t))$ $t \in \mathbb{R}$.
- g) $F(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
- h) $F(t) = (e^t, e^{2t})$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.11. Considere a função $F(u, v) = (u, 2v, 3u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. A imagem desta função é composta de todos os pontos da forma (x, y, z) que satisfazem a equação $z = 3x - \frac{y}{2}$. E portanto é um plano, contendo a origem e com vetor normal com a direção de $(-3, 1/2, 1)$. Observe que esta é a **imagem** da função ; não o seu gráfico. O gráfico desta função é subconjunto de $\mathbb{R}^5$. Dizemos que o plano é parametrizado pela função .

Exercício 1.1.13. Esboce os conjuntos parametrizados pelas funções descritas a seguir:

- a) $F(u, v) = (2u, 3v, 2u + 3v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$;
- b) $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$, $r \in (0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
- c) $F(u, v) = (u, u^2)$, $u \in \mathbb{R}$, $v[0, 1]$;
- d) $F(u, v) = (u\cos v, u\mathrm{sen} v, v)$, $u \in [0, 2]$, $v \in [0, 4\pi]$.

Até o momento, discutimos vários conjuntos associados Ã funções vetoriais de várias variáveis. Essencialmente tínhamos gráficos, conjuntos de nível (para funções reais) e conjuntos parametrizados.

Exemplo 1.1.12. Sabemos que o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ é representao por uma reta com coeficiente angular 2 contendo o ponto $(0, 1)$. Considere entÃ£o a função $F(x, y) = y - 2x - 1$. O conjunto de nível 0 desta função é exatamente a mesma reta. Além disso, esta reta também é imagem da função $g(x) = (x, 2x + 1)$. Observe que as funções f, F e g sÃ£o com-ple-ta-men-te diferentes, seus gráficos sÃ£o distintos, seus conjuntos domíni e imagem também.

Observamos, assim, que um mesmo "desenho"ou objeto geométrico pode ser descrito de modo diferente, usando funções . Isto é: existem muitas maneiras de descrever um objeto geométrico.

Exemplo 1.1.13. Denomine por γ a parábola que é gráfico de $f(x) = x^2$. Observe que γ também é conjunto de nível das funções , $F(x, y) = y - x^2$, $G(x, y) = e^{y-x^2}$, e imagem das funções $h(x) = (x, x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ ou $w(x) = (x^3, x^6)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dos últimos exemplos surgem naturalmente algumas perguntas: como descrever através de uma função um determinado objeto geométrico ? Quantas maneiras existem para fazer esta descrição ? Nos exemplos acima trabalhamos com tr es conceitos: gráficos, conjuntos de nível e parametrizações . Quanto um conjunto é descrito como **gráfico** de função dizemos que a definição é *explícita*; se o conjunto for **conjunto de nível** da função , dizemos que a descrição é implícita; se o conjunto for **imagem** da função dizemos que a definição é *paramétrica*.

Exemplo 1.1.14. Seja γ a curva que representa o gáfico de $f(x) = \text{sen }(x)$, $x \in [0, 2Pi]$. γ é gráfico de f e, por isso, f define γ explícitamente. γ é conjunto de nível de $F(x, y) = y - \text{sen }(x)$, $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ e, assim, F descreve γ implicitamente; e γ é imagem de $g(x) = (x, \text{sen }(x))$, $x \in [0, 2\pi]$ e g descvreve γ parametricamente.

Exercício 1.1.14. Em cada um dos itens a seguir está descrita uma curva γ. Identifique se a descrição dada é implícita, explícita ou paramétrica. Obtenha, sempre que possível, as outras duas formas e tente fazer um esboço.

a) γ é a reta descrita por $y = 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{tais que } 3x + 4y = 2\}$;

c) γ á a imagem de $h(x) = (x, 3x + 1)$;

d) γ é parametrizada por $g(x) = 2x, 3x^2)$, $x \in [-1, 1]$

e) γ é o conjunto de nível 3 da função $F(x, y) = 3y - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}$;

f) $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; taisque 3x^2 + 4y^2 = 1\}$;

g) $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{tais que} xy = 2\}$

h) γ é a imagem da função $g(x) = (x, 2/x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

os exemplos e exercícios anteriores levantam uma série de perguntas. Existe mais de uma forma implícita de se descrever uma curva? Implícita? paramétrica? Sempre é possível descrever uma curva das três maneiras?

Exemplo 1.1.15. Vamos considerar agora o plano com vetor normal na direção de $(2, 1, 3)$ contendo o ponto $(1, -2, 1)$. Observe que este plano é o conjunto de nível 0 da função $F(x, y, z) = 2(x - 1) + (y + 2) + 3(z - 1)$. Também é gráfico de $G(x, y) = \frac{1}{3}(2x - y + 3)$ e, ainda é imagem de $H(u, v) = (u, v, 2u - v + 3)$. Observe que conseguimos definições explícitas, implícitas e paramétricas para este plano.

Exercício 1.1.15. Em cada um dos itens a seguir está descrita uma superfície $\mathcal{S}$. Identifique se a descrição dada é implícita, explícita ou paramétrica. Obtenha, sempre que possível, as outras duas formas e tente fazer um esboço.

a) $\mathcal{S}$ é o plano descrita por $y + z - 3x + 1 = 2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$tais que $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in [0, 2] \times [-1, 1]$;

c) $\mathcal{S}$ é a imagem de $h(x, y) = (x, 3x + 1, 2y + x)$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

d) $\mathcal{S}$ é parametrizada por $g(x, y) = x, \cos(y), \operatorname{sen} y)$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 4\pi]$;

e) $\mathcal{S}$ é o conjunto de nível 3 da função $F(x, y) = 3y - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}$;

f) $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$tais que $x^2 + y^2 = 1\}$;

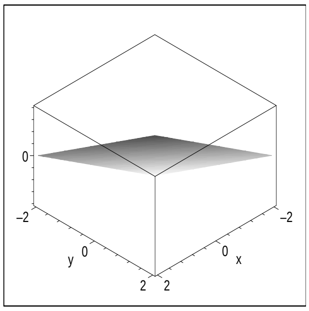
g) $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

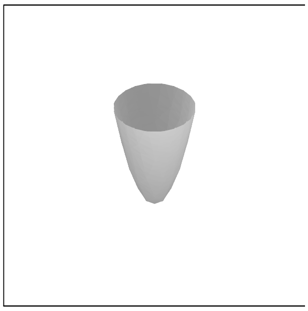
h) $\mathcal{S}$ é a imagem da função $G(x, y) = (\cos(y), \operatorname{sen} y, x)$, $(x, y) \in [0, 3\pi] \times [0, 2]$.

Mais uma vez você pode se perguntar: é sempre possível descrever uma superfície nessas três formas? Existe mais de uma representação explícita? Implícita? Paramétrica?

1.1.3 Alguns EsboÃ§os

Veja os gráficos das funções dos exemplos (1.1.1) e (1.1.2):





Definição 1.1.6. Dada uma função de duas variáveis, $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, e uma constante real c, a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

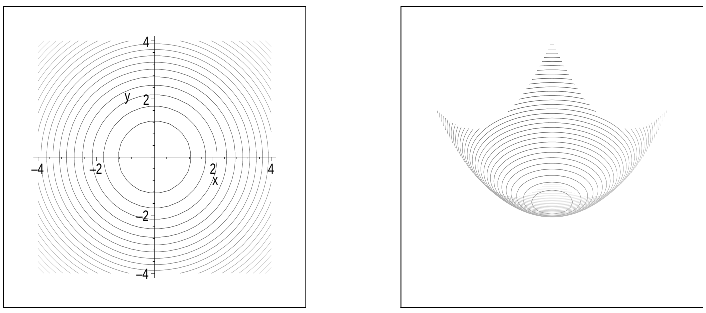
$$N_c = \{(x, y) \in D_f; f(x, y) = c\}$$

é chamada de a curva de nível c de f.

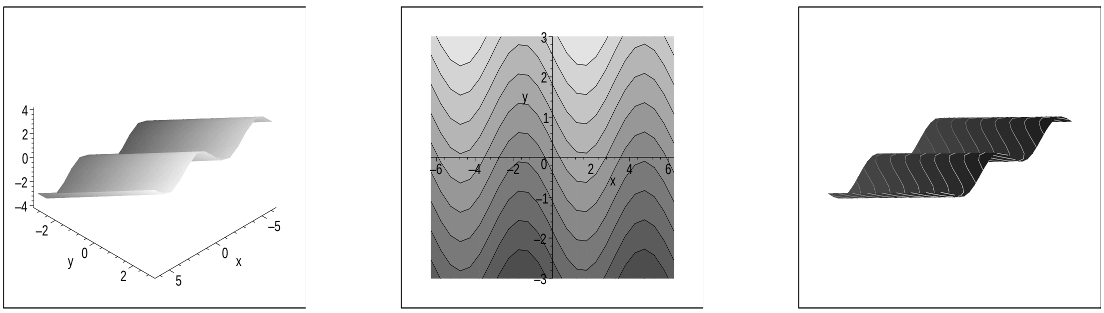
Exemplo 1.1.16. (exemplo (1.1.2) revisitado) As curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ são dadas por $N_c = \{(x, y); x^2 + y^2 = c\}$. Assim,

$$N_c = \begin{cases} \{(x, y); x^2 + y^2 = c\}, & c > 0 \qquad \text{(círculo)} \\ (0, 0), & c = 0 \qquad \text{(ponto)} \\ \emptyset & c < 0 \qquad \text{(vazio)} \end{cases}$$

Os gráficos abaixo foram feitos no Maple usando os comandos contourplot (para desenhar as curvas de nível) e contourplot3d (para ver as curvas de nível "levantadas"ao nível apropriado.



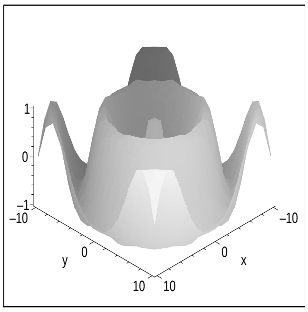
Exemplo 1.1.17. $f(x, y) = \text{sen}(x) + y$. As curvas de nível de f são dadas por $\text{sen}(x) + y = c$ *i.e.*, $N_c = \{(x, y); y = c - \text{sen}(x)\}$. Veja o gráfico de f, de suas curvas de nível e o gráfico de f com as curvas de nível "levantadas":

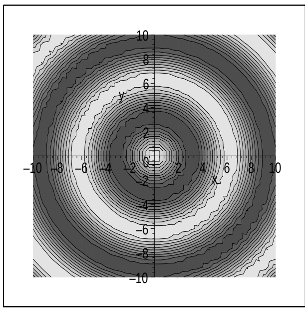


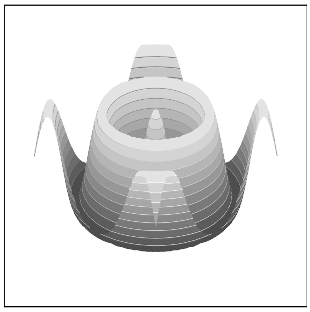
Exemplo 1.1.18. $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$. As curvas de nível de f são dadas por $\cos(\sqrt{x^2 + y^2}) = c$. Assim,

$$N_c = \begin{cases} \{(x, y); x^2 + y^2 = \arccos^2(c)\}, & 0 < c < 1 \qquad \text{(círculo)} \\ (0, 0), & c = 1 \qquad \text{(ponto)} \\ \emptyset, & c > 1 \qquad \text{(vazio)} \end{cases}$$

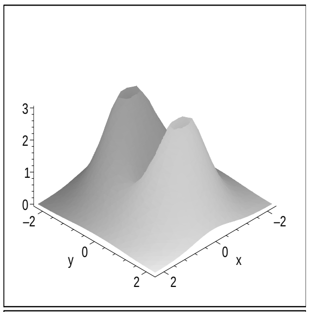
Veja o gráfico de f, de suas curvas de nível e o gráfico de f com as curvas de nível "levantadas":

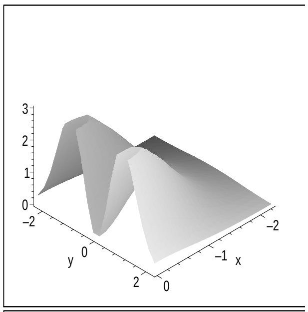


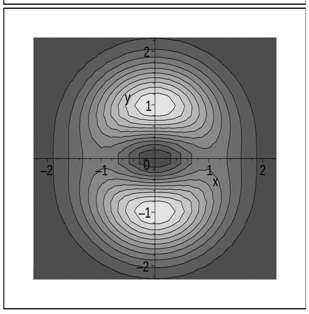


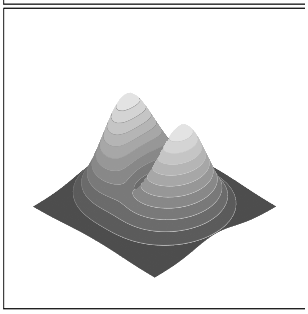


Exemplo 1.1.19. $f(x,y) = 3(x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$. As curvas de nível de f são dadas por $3(x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = c$. Veja o gráfico de f, o gráfico de f restringindo seu domínio, o gráfico de suas curvas de nível e o gráfico de f com as curvas de nível "levantadas":

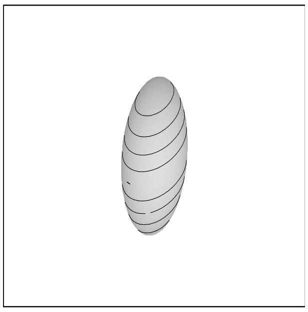








Exemplo 1.1.20. Seja $f(x,y,z) = \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}$. É claro que não é possível desenhar o gráfico de f, já que esse é um subconjunto do $\mathbb{R}^4$. Entretanto, podemos desenhar qualquer superfície de nível $S_c = \{(x,y,z); f(x,y,z) = c\}$ dessa função . Note que se $w = f(x,y,z)$ = c e $c < 0$ ou $c > 1$, $S_c =$ é vazio. Para $0 < c < 1$, a superfície de nível c satisfaz: $S_c = \{(x,y,z); 1 - 4\,x^2 - 9\,y^2 - z^2 = c^2\}$, logo, $S_c = \{(x,y,z); 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 - c^2\}$. Veja o desenho abaixo (para $C = 0$):



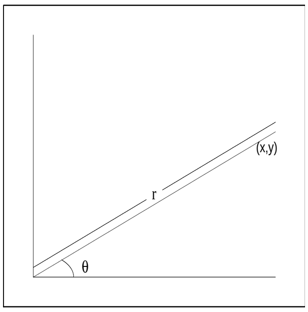
Exemplo 1.1.21. Seja

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longrightarrow (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

Note que f é inversível:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow [0, \infty) \times [0, 2\pi] \\ (x, y) &\longrightarrow (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \begin{cases} \arctan(y/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ e } y \geq 0\,) \\ \pi, & x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Veja a figura:



1.2 Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.2.1. O *produto interno* (usual) de dois vetores em $\mathbb{R}^n$ é $\langle x,\, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$.

Propriedades 1.2.1. (a) $\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle, x, y \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\langle a\, x,\, y\rangle = a\,\langle x,\, y\rangle$, para $a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$;

(c) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z,\, y\rangle, x, y, z \in \mathbb{R}^n$;

(d) $|\,\langle x, y\rangle\,| \le \|x\|\|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade de Schwartz - veja a demonstração adiante).

Definição 1.2.2. A *norma* (usual) de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$.

Propriedades 1.2.2. (a) $\|x\| = 0$ se e só $x = 0$;

(b) Se $a \in \mathbb{R}$, então $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(c) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Demonstração da desigualdade de Schwartz:
Para todo $t \in \mathbb{R}$, $0 \le \|tx+y\|^2 = \langle tx+y, tx+y\rangle = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Mas se $at^2+bt+c \ge 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \le 0$ e portanto, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$, *i.e.* $|\,\langle x, y\rangle\,| \le \|x\|\|y\|$
Demonstração da desigualdade triangular:
$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + 2\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + 2\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 - (\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|) \\ &= 2\,\langle x,\, y\rangle - 2\|x\|\|y\| \le 0 \text{ pela desigualdade de Schwarz} \end{aligned}$$

Portanto, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.2.3. A *distância* entre dois pontos x e $y \in \mathbb{R}^n$ é dada por: $\mathrm{d}(x,\, y) = \|x-y\|$.

Lembre que um aberto em $\mathbb{R}$ é a união de intervalos abertos e que um intervalo aberto (a, b) pode ser dado como $(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}; \mathrm{d}(x,\, P) < r, \text{onde } P = \dfrac{a+b}{2}, r = \dfrac{a+b}{2}\right\}$.
Vamos agora definir os abertos de $\mathbb{R}^n$:

Definição 1.2.4.
Uma *bola aberta* centrada em $P \in \mathbb{R}^n$ e de raio r é: $B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathrm{d}(x,\, P) < r\}$.
Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é *aberto* se é uma união de bolas abertas.
Um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é *fechado* se é o complementar de um conjunto aberto.
Dado A subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $P \in A$, dizemos que P é *ponto interior* de A se existe uma bola aberta B tal que $P \in B \subset A$. P é um *ponto exterior* de A se existe uma bola aberta B tal que $P \in B \subset A^c$. Finalmente, P é um *ponto de fronteira* ou *ponto de bordo* de A se qualquer

bola aberta B contendo P também contém pontos interiores e exteriores de A. O conjunto dos pontos interiores de A é denotado por $int(A)$ ou A^o, o conjunto dos pontos exteriores de A por $ext(A)$ e o conjunto dos pontos de fronteira por ∂A. O *fecho* de A é a união $A \cup \partial A$ e é denotado por $\bar{A}$.

Exemplo 1.2.1. Sejam $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 < 1\right\}$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x < 1\}$. A e B são abertos; o bordo de B é $\partial B = \{(1, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$ e o fecho de B é $\overline{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \leq 1\}$.

1.3 Limites

Lembre que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem limite L quando x tende para a, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.
A definição para funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a mesma! Apenas interprete x e a como pontos em $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ e L como pontos de $\mathbb{R}^m$ e escreva $\|x - a\|$ e $\|f(x) - L\|$ ao invés de $|x - a|$ e $|f(x) - L|$. Assim:

Definição 1.3.1. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite L quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ ou } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - L\| < \epsilon$ se $0 < \|x - a\| < \delta$.
Equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ ou } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), L) < \epsilon$ se $0 < d(x, a) < \delta$.

Propriedades 1.3.1. 1. O limite se existe é único. (unicidade)
2. Se f e g, funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, então :

(a) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = A + B$ (regra da adição).

(b) $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$; em particular, caso $m = 1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = A\, B$ (regra do produto).

(c) caso $m = 1$ e $B \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$ (regra do quociente).

(d) caso $m = 1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)^n = A^n, n \in \mathbb{N}$.

(e) caso $m = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{A}$ se p é ímpar ou se p é par e $A > 0$.

(f) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$.

Valem também o teorema do sanduíche e suas conseqÃ$\frac{1}{4}$ências:

Exemplo 1.3.1. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

Solução : $\text{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ é limitada e além disso, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) = 0.$$

Note que a definição acima pode ser reescrita como:

Definição 1.3.2. (reescrita) A função f tem *limite* L quando x tende para a, e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ou, equivalentemente, $f(x) \longrightarrow L$ quando $x \longrightarrow a$, se para toda bola aberta de raio $\epsilon > 0$ em torno de L, existe uma bola aberta de raio $\delta > 0$ tal que se $x \in B_\delta(a) - \{a\}$, então $f(x) \in B_\epsilon(L)$.

Assim, fazer x se aproximar de a, significa que x se aproxima de a segundo **qualquer** direção .

Exemplo 1.3.2. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Solução : Note que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$. Tomando o limite na direção $y = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Agora tomando o limite na direção $x = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como o limite deve ser único se existir, esse limite não existe !!

Exemplo 1.3.3. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Solução : Tomando o limite na direção $y = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Agora tomando o limite na direção $x = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Finalmente, tomando o limite na direção $x = y$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Como o limite deve ser único se existir, esse limite não existe.

Exemplo 1.3.4. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Solução : Tomando o limite na direção $x=0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $y=0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $x=y$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $y=2x$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^4}{25x^4} = \frac{-3}{25}$$

Logo esse limite não existe.

Exemplo 1.3.5. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Solução : Tomando o limite na direção $x=0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $x=y^2$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=y^2} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Assim, esse limite não existe.

Os exemplos anteriores ilustram que geralmente é fácil mostrar que um limite não existe. Para mostrar que existe pode ser mais difícil. Veja:

Exemplo 1.3.6. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$.

Solução : $0 \le x^2 \le x^2+y^2$, logo, $0 \le \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \le x^2$. Assim,

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$.

Exemplo 1.3.7. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0.$

Solução : $0 \le x^4 \le x^4+y^2$ logo $0 \le x^2 \le \sqrt{x^4+y^2}$; $0 \le y^2 \le x^4+y^2$ logo $0 \le |\,y\,| \le \sqrt{x^4+y^2}$. Assim,

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\,x^3y\,|}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^2}} \, \frac{|\,y\,|}{\sqrt{x^4+y^2}} \, |\,x\,| = 0.$$

Exemplo 1.3.8. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$

Solução : $0 \le x^2 \le x^2+y^2+z^2$, logo, $0 \le |\,x\,| \le \sqrt{x^2y^2+z^2}$. Da mesma forma, $0 \le |\,y\,| \le \sqrt{x^2y^2+z^2}$ e $0 \le |\,z\,| \le \sqrt{x^2y^2+z^2}$. Assim,

$$0 \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|\,xyz\,|}{x^2+y^2+z^2} \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Como $-|\,a\,| \le a \le |\,a\,|$, $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$

Definição 1.3.3. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite infinito quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ou, } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

se para todo $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x)\| > N$ se $0 < \|x-a\| < \delta$.

Exemplo 1.3.9. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty.$

Solução : Para todo $N > 0$, existe $\delta = \sqrt{N}$ tal que se $\|(x,y)\| < \delta$, *i.e.*, $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, então

$$\|f(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2} > \frac{1}{\delta^2} = N.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty.$

Definição 1.3.4. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite L quando x tende para infinito e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ ou, } f(x) \longrightarrow L \text{ quando } x \longrightarrow \infty$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\|f(x) - L\| < \epsilon$ se $\|x\| > N$.

Exemplo 1.3.10. Mostre que $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^4+y^2} = 0.$

Solução : $x^4+y^2 > x^2+y^2$ para $\|x\| > 1$. Assim, $\dfrac{1}{x^4+y^2} < \dfrac{1}{x^2+y^2}$ para $\|x\| > 1$. Logo,

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^4+y^2} \le \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

(note que esse é um limite de uma variável!)

Exercício 1.3.1. 1. Calcule, quando existirem, os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x+y$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y+z^2}{x^4+y^2+z^3}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-y^2-2x+2y}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{1-\cos(xy-2x)}{(y-2)^2}$

1.4 Continuidade

Lembre da definiãç de continuidade em um ponto para funções de uma variável:

Definição 1.4.1. Continuidade em um ponto
A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. A função f é descontínua em $a \in D$ se $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ou se não existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

A mesma definição vale para funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$!!! Observe que neste caso, está implícito na definição que a é um ponto interior do domínio de f. Uma outra maneira de escrever essa definição é:

Definição 1.4.2. Continuidade em um ponto (reescrita)
A função f é contínua em a, se para toda bola aberta de raio $\epsilon > 0$ em torno de $f(a)$, existe uma bola aberta de raio $\delta > 0$ tal que se $x \in B_\delta(a)$, então $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$.

Propriedades 1.4.1.
1. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas em a então as funções $f+g, f-g$ e $\langle f, g\rangle : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também são contínuas em a. Em particular, para $m = 1$, a função $fg : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também é contínua em a. Além disso, caso $m = 1$ e $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ também é contínua em a.
2. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são contínuas em $a \in D_1$ e $b \in D_2$ com $f(a) = b$, então $g \circ f : \{x \in D_1 \subset \mathbb{R}^n; f(x) \in D_2\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em a.

Para funções reais de uma variável, era comum estudarmos limites e continuidade a direita e a esquerda. Isso não faz sentido para funções $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ para $n > 1$. Entretanto, neste caso, podemos estudar continuidade em pontos do bordo.

Definição 1.4.3. Continuidade em pontos de bordo
A função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in \partial D$, se $\lim\limits_{x\to a, x\in int(D)} f(x) = f(a)$.

Definição 1.4.4. Continuidade
A função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se é contínua em todos os pontos de D.

Propriedades 1.4.2.
1. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas então as funções $f+g, f-g$

e $\langle f, g\rangle : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também são contínuas. Em particular, para $m = 1$, a função $fg : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também é contínua. Além disso, caso $m = 1$ e $g(x) \neq 0$, para todo x, f/g também é contínua.
2. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são contínuas e $f(D_1) \subset D_2$, então $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua.

$$\begin{array}{ccccc} D_1 \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & D_2 \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & g(y) \end{array}$$

Aplicação 1.4.1.
1. Polinômios são contínuos.
2. Funções racionais $f : \mathbb{R}^n - \{\text{zeros do denominador de } f\} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Exemplo 1.4.1. Estude a continuidade de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = 0 \end{cases}$.

Solução : Para $(x,y) \neq (0,0)$, f é contínua pois é racional. Para $(x,y) = (0,0)$, vamos estudar o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ Tomando o limite na direção $x = y$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Fazendo agora o limite na direção $x = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Assim, o limite não existe e portanto f é descontínua em $(x,y) = (0,0)$.

Exemplo 1.4.2. (exemplo 1.3.1 revisitado) Estude a continuidade de
$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Solução : Note que a função $\text{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ é contínua pois é a composta de duas funções contínuas. Veja o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 - \{(x,y); xy \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{xy} & & \\ & & t & \longmapsto & \text{sen}(t) \end{array}$$

Assim, para $(x,y) \neq (0,0)$, f é contínua pois é o produto de um polinômio por uma função contínua. Além disso, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$, e logo, f é contínua em $(x,y) = (0,0)$. Portanto, f é contínua.

Exemplo 1.4.3. (exemplo 1.3.7 revisitado) Estude a continuidade de
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução : a função $\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ é racional sem pólos portanto contínua. Além disso, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$ e logo f é contínua em $(x,y) = (0,0)$. Portanto, f é contínua.

Exemplo 1.4.4. Seja $f : [0,\infty) \times [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$ e $g : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \dfrac{y}{x}$. O que você pode dizer sobre $g \circ f$?

Solução :
$$\begin{aligned} g : (0,\infty) \times [0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,\theta) &\longmapsto g(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) = \tan(\theta) \end{aligned}$$

Como f e g são contínuas, $g \circ f$ é contínua.

Exemplo 1.4.5. (exemplo 1.3.6 revisitado) Obtenha, se possível, a extensão contínua da função $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$.

Solução : f é contínua, pois é racional. Além disso, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$ (veja o exemplo 3.2.3), f possui extensão contínua, $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = 0 \end{cases}$.

Exercício 1.4.1. Em cada caso, descreva o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ no qual a função é contínua:

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ b) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy$ c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = 0 \end{cases}$

Exercício 1.4.2. Em cada caso, descreva o subconjunto do $\mathbb{R}^3$ no qual a função é contínua:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{\mathrm{sen}(xy) + \cos(xy)}{x^2+y^2+z^2-4}$ b) $f(x,y,z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}$

Exercício 1.4.3. A função f; $f(x,y) = |x+y-1|$ é contínua em $\mathbb{R}^2$? Justifique.

Exercício 1.4.4. Idem para $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2; & x^2+y^2 \leq 4 \\ 4; & x^2+y^2 > 4 \end{cases}$

1.5 Respostas aos Exercícios

Seção 2.2

a) 0	b) 0	c) $\nexists$
d) $\nexists$	e) $\nexists$	f) $\nexists$
g) 1/2		

Seção 2.3

1a) $x \neq y$	1b) $\mathbb{R}^2$	1c) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
2a) $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$	2b) $x^2 + y^2 + z^2 < 2$	3) Sim: é composta de contínuas

4) $f = g \circ h$, onde $h(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(t) = \begin{cases} t; & t \leq 4 \\ 4; & t > 4 \end{cases}$. Como g e h são contínuas, f também é.

Capítulo 2

Derivadas

2.1 derivadas Parciais

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Queremos estudar a variação de f com apenas uma de suas variáveis. Isto é: o domínio de f é um conjunto de pontos da forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com cada um dos x_i variando independentemente. Podemos entretanto fixar x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n e deixar apenas uma das variáveis, x_i, variar. Neste caso f depende apenas da variável x_i e é possível portanto derivá–la em relação a x_i. Formalmente definimos:

Definição 2.1.1. A derivada parcial de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em relação à variável x_i em um ponto $X_0 = ({x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_i}^0, \ldots, {x_n}^0)$ é definida como:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f({x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_i}^0 + h, \ldots, {x_n}^0) - f({x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_i}^0, \ldots, {x_n}^0)}{h} \tag{2.1}$$

ou, se $H = (0, 0, \ldots, h, \ldots, 0)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0)}{h} \tag{2.2}$$

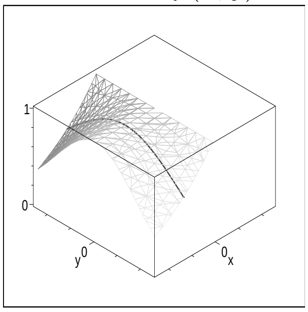
Considere, por exemplo, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2{x_3}^2 \operatorname{sen} x_2$. Se fixarmos $x_1 = 1$, $x_2 = \pi/2$, nossa função será $f(x_3) = 1 + 2{x_3}^2$ e evidentemente sua derivada (em relação à x_3) é $4x_3$. Portanto, em $X_0 = (1, \pi/2, 2)$ temos que a derivada parcial de f em relação a x_3 , em X_0 é 8.

Notação Existem notações diversas para derivada parcial de f na variável x_i em um ponto X_0; indicaremos algumas:

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0); \quad f_{x_i}(X_0); \quad D_{x_i} f(X_0) \quad f_i(X_0).$$

Defina a função $f(x, y) = \exp(-xy^2)$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. A figura 2.1, apresenta o gráfico da função . Se fixarmos $x = 1/2$, e deixarmos y variar, veremos uma curva (indicada na figura), contida no plano $x = 1/2$, parametrizada por $(1/2, y, \exp(-1/2y^2))$, $y \in [-1, 1]$. A derivada parcial de f em relação à y em um ponto $X_0 = (1/2, y)$ é $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = -y^2 \exp(-1/2y^2)$. Tomando, em particular, $y = 1/2$, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = -(1/2)^2 \exp(-1/2(1/2)^2)$. Observe que a curva $(1/2, y, \exp(-1/2y^2))$ está contida no plano $x = 1/2$. Neste plano, ela é gráfico

Figura 2.1: Gráfico de $f(x, y) = \exp(-xy^2)$



de uma função $z(y) = \exp(-1/2y^2)$ e $z'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = -y^2 \exp(-1/2y^2)$. Em particular, $z'(1/2) = -(1/2)^2 \exp(-1/2(1/2)^2)$. De acordo com nossos conhecimentos de cálculo de uma variável, $z'(1/2)$ é o coeficiente angular da reta contida no plano $x = 1/2$ e tangente à curva em $(1/2, 1/2, \exp(-1/2(1/2)^2)$. Um raciocínio análogo pode ser feito, fixando $y = 1/2$ e deixando x variar, para se obter o coeficiente angular da reta tangente a curva $(x, 1/2, \exp(-xy^2))$, contida no plano $y = 1/2$, no ponto $(1/2, 1/2, \exp(-1/2(1/2)^2)$, também representada na figura 2.1.

Exercício 2.1.1. Marcelinho - amigo intelectual de Pedrinho - leu a explicação acima e não entendeu. Considerou que, como cada uma das curvas mencionadas está contida em $\mathbb{R}^3$, não se devia falar em "coeficiente angular"de reta tangente. Afinal, o que é o "coeficiente angular"de uma reta de $\mathbb{R}^3$? Marcelinho tem razão? Esclareça a dúvida de Marcelinho.

Exercício 2.1.2. Encontre dois vetores que geram o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \exp(-xy^2)$ no ponto $(1/2, 1/2, \exp(-1/2(1/2)^2)$. Determine a equação do plano. Generalize para um ponto X_0 qualquer.

Exercício 2.1.3. Dada uma função $z = f(x, y)$, obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de f em um ponto X_0 qualquer.

Exercício 2.1.4. Esboce o gráfico de alguma função tal que para algum ponto $X_0 = (x_0, y_0)$ de seu domínio, existe a derivada parcial em x, mas não em y.

Exercício 2.1.5. Esboce o gráfico de alguma função tal que em algum ponto $X_0 = (x_0, y_0)$ de seu domínio, nenhuma das derivadas parciais existe, mas a função é contínua em todo o seu domínio.

Exercício 2.1.6. Para cada uma das funções a seguir, faça:

a) Calcule cada uma das derivadas parciais em um ponto genérico X_0;

b) quando fizer sentido, calcule a equação do plano tangente ao gráfico no ponto X_0 dado:

$$\begin{array}{llllllll}
a) & f(x,y) & = & x^2\ln(xy),\ X_0=(1,1) & b) & f(x,y) & = & 3x+5\mathrm{sen}(2y-x),\ X_0=(\pi,\pi)\\
c) & f(x,y) & = & x^2+y^2 & d) & f(x,y) & = & 2x-3y\\
e) & f(x,y) & = & (x-y^x),\ X_0=(2,1) & f) & f(x,y,z) & = & (xsen(yz))\\
g) & f(x,y,z) & = & y & h) & f(x,y) & = & (\frac{1}{2y+3})\sqrt{x^2y}\\
i) & f(x,y) & = & xy,\ X_0=(0,3) & j) & f(x,y) & = & e^{x+y}\\
k) & f(x,y) & = & x^2+2xy & l) & f(x,y) & = & y
\end{array}$$

A exemplo do cálculo de uma variável também podemos derivar funções de mais de uma variável muitas vezes, definindo as derivadas de ordem superior. É possível derivar a função duas vezes em x e diremos que temos a derivada segunda em relação a x. Por exemplo, se $f(x,y,z)=x^2\exp(zy)$, derivando em x uma vez, teremos $f_x=2x\exp(yz)$. Derivando de novo em x, teremos $fxx=2\exp yz$, é a derivada segunda em x. Derivando fxx em relação a y obtemos $f_{xxy}=2z\exp yz$ que é uma derivada parcial mista de ordem 3.

Notação Existem notações diversas para as derivadas parciais de ordem superior de f.Indicaremos algumas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_0);\quad f_{x_ix_i}(X_0);\quad D^2{}_{x_i}f(X_0)\quad f_{ii}(X_0).$$

denotam derivadas parciais de segunda ordem na variável x_i.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_ix_j}(X_0);\quad f_{x_jx_i}(X_0);\quad D^2{}_{x_jx_i}f(X_0)\quad f_{ji}(X_0).$$

Denotam o resultado da derivação primeiro por x_j e depois por x_i.

Exercício 2.1.7. Para cada uma das funções descritas, calcule cada uma das derivadas pedidas.

$$\begin{array}{llllllll}
a) & f(x,y,z) & = & x^2\ln(x+y) & b) & f(x,y,z) & = & 3x+5\mathrm{sen}(2yz-x)^z\\
c) & f(x,y,z) & = & \mathrm{arctg}(x^2+y^2) & d) & f(x,y,z) & = & exp(2x-3y)
\end{array}$$

Calcule:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}\ \ f^3xxy\ \ f^2zx$$

Exercício 2.1.8. Dado $w=x^2y+y^2z+z^2x$, mostre: $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=(x+y+z)^2$.

Exercício 2.1.9. Calcule todas as derivadas parciais de $f(x,y,z)=\ln x\mathrm{tg}(y)$ no ponto $(3,\pi/4)$.

Exercício 2.1.10. para a função $z=\int_x^{x^2+y^2}e^t dt$, calcule $z_x(1,2)$ e $z_y(1,2)$.

Exercício 2.1.11. Determine as derivadas parciais de:

$$a)f(x,y)=\int_x^y\cos(t)dt\quad b)f(x,y)=\int_x^y \mathrm{e}^(-t^2)dt$$

Exercício 2.1.12. Mostre que se $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ então $xz_x+yz_y=1$.

Exercício 2.1.13. Dada:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^3-y^3)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mostre que em $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

2.2 Lembrando Cálculo I

Considere uma função $f(x)$ com domínio e contradomínio real. fixe um ponto x_0 no domínio de f e suponha que se queira aproximar esta função **em vizinhança de x_0** por um polinômio de grau 1. Isto é, queremos determinar a e b constantes tais que:

$$f(x_0 + h) \simeq a(x_0 + h) + b \tag{2.3}$$

onde $\simeq$ se lê como *aproximadamente igual*. de fato, queremos que a equação (2.3) seja tão mais verdadeira quanto mais próximo $x_0 + h$ estiver de x_0. Isto é, gostaríamos de obter a e b tal que se h está próximo de 0, a diferença entre $f(x_0+h)$ e $a(x_0+h)+b$ é muito pequena. reescrevemos então o problema como sendo: obtenha a e b tal que:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b + erro(h) \tag{2.4}$$

e $\lim_{h\to 0} erro(h) = 0$.

É bastante razoável que a proximação que procuramos seja exata em x_0, de modo que impomos também que $erro(0) = 0$, ou seja $f(x_0) = ax_0 + b$.

Escrevemos então o problema: Dado x_0 fixo no domínio de f, procuro a e b constantes tais que:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b + erro(h) \tag{2.5}$$
$$erro(0) = 0 \tag{2.6}$$
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 \tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) em (2.5) escrevemos:

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0 \tag{2.8}$$

e portanto, conhecido a sabemos determinar b. Substituindo o valor de b em (2.5), (2.6) e (2.7) vem:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + f(x_0) - ax_0 + erro(h) \tag{2.9}$$
$$erro(0) = 0 \tag{2.10}$$
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 \tag{2.11}$$

As equações podem ser reescritas:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + erro(h) \tag{2.12}$$
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 \tag{2.13}$$

É evidente que quando h tende a zero, o lado direito de (2.12) também tende a zero, o que implica que, se a nossa aproximação tem alguma chance de existir, f deve ser contínua em x_0. Além disso, se ah tende a zero mais rápido que $erro(h)$, teremos que em vizinhança de x_0, $f(x_0 + h) - f(x_0)$ será aproximada por $erro(h)$ e não por ah como gostaríamos. Por esta razão, acrescentamos à nossa formulação do problema a exigência de que $erro(h)$ deve tender a zero mais rápido que ah e uma maneira de exigir isto é impor que $\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0$. Dividindo os dois lados de (2.12) por h vem:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + \frac{erro(h)}{h} \tag{2.14}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0 \tag{2.15}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$ dos dois lados (2.14) obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \tag{2.16}$$

O bserve que a equação (2.16) descreve o que provavelmente você está acostumado a definir como *derivada da função f em x_0*. Observe ainda, que o polinômio $ax+b$ que aproxima f em vizinhança de x_0 existe se e só se f é diferenciável em x_0 e neste caso, a é a derivada de f em x_0. Chegamos à expressão (2.16) procurando uma aproximação para a função por um polinômio de grau 1. De fato poderíamos formalizar nosso raciocínio redefinindo a derivada de f em x_0 assim:

Definição 2.2.1. Dizemos que uma função f é diferenciável em x_0 se e sómente se existe um valor a tal que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + erro(h) \tag{2.17}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0 \tag{2.18}$$

e neste caso, a é dito a derivada de f em x_0.

2.3 Funções vetoriais de várias variáveis

Considere agora:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & (f_1, ..., f_m) \end{array} \tag{2.19}$$

. Queremos definir o conceito de derivada para a função F. A generalização imediata da definição (2.2.1) nos levaria em princípio a escrever que estamos procurando uma aproximação de grau 1 para a função F na vizinhança de um ponto x_0 determinado. Observe que o ponto deve pertencer ao domínio da função , que neste caso é $\mathbb{R}^n$. Neste texto vamos convencionar que vetores serão designados por letras maiúsculas e números reais por minúsculas. fixamos então X_0 em $\mathbb{R}^n$ e tentamos escrever: $F(X_0+h) \simeq a(X_0+h)+b$. Como a função F só pode ser avaliada em valores com n coordenadas, observamos que X_0+h deve ser um vetor e portanto, h deve ter n coordenadas. Consideramos então $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$ e escrevemos: $F(X_0+H) \simeq a(X_0+H)+b$.

Exercício 2.3.1. Escolha X_0 em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e faça um esboço de X_0+H para vários valores de H. Observe que quando H varia, X_0+H varia em torno de X_0.

Em analogia ao raciocínio anterior podemos escrever que queremos determinar a e b tais que: $F(X_0 + H) = a(X_0 + H) + b + erro(H)$

Exercício 2.3.2. 1. Na expressão $F(X_0+H) = a(X_0+H)+b+erro(H)$ quantas coordenadas tem o lado esquerdo?

2. Que tipo de objetos (vetores? números? matrizes ?) devem ser a, b e $erro$ para que a expressão tenha sentido?

No exercício anterior, observamos que $F(X_0 + H)$ tem m coordenadas e assim, $a(X_0 + H) + b + erro(H)$ também deve ter m coordenadas para que a igualdade faça sentido. Isto implica que cada um dos termos $a(X_0+H)$, b e $erro(H)$ também deve ter m coordenadas. Concluímos então que b deve ser um vetor de $\mathbb{R}^m$, $erro(H)$ é uma função com imagem em $\mathbb{R}^m$ e n variáveis. No caso de $a(X_0 + H)$ verificamos que alguma coisa multiplicada por um vetor de n coordenadas deve produzir um vetor de m coordenadas. Logo concluímos que a é uma matriz $m \times n$. Reescrevemos então o nosso problema como: detrminar A e B, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(X_0 + H) = AX_0 + AH + B + erro(H) \tag{2.20}$$

Como no caso de uma variável vamos impor que o erro seja zero quando $H = (0, ..., 0)$ e portanto, $F(X_0) = AX_0 + B \Rightarrow F(X_0) - AX_0 = B$ e reescrevemos a equação (2.20) como:

$$\begin{array}{rcl} F(X_0 + H) & = & AX_0 + AH + F(X_0) - AX_0 + erro(H) \\ & \Rightarrow & \\ F(X_0 + H) & = & F(X_0) + AH + erro(H) \end{array} \tag{2.21}$$

finalmente, observamos que o erro deve ir a zero mais rápido que a nossa aproximação quando H se aproxima de $(0, 0, ...0)$ e acrescentamos a condição de que :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{erro(H)}{\|H\|} = 0 \tag{2.22}$$

Definição 2.3.1. Dizemos que a função F é diferenciável (derivável) em um ponto X_0 se existe uma matriz A que satisfaz (2.21) e (2.22). Neste caso A é dita a diferencial de F em X_0 . A função :

$$\begin{array}{rccc} DF: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m\times n} \\ & X & \mapsto & DF(X) \end{array} \tag{2.23}$$

é dita a derivada de F.

Exercício 2.3.3. Considere $F(x, y, z) = (2x - y, 3z + 2x, -y + z)$. Obtenha a diferencial de F em $X_0 = (1, \pi, 3)$.

A definição 2.3.1 é pouco operacional. No caso de funções reais de uma única variável, como foi visto, a equação análoga à (2.21) é dividida por h e conseguimos obter a derivada como um determinado limite. No caso vetorial, evidentemente não faz sentido dividir por um vetor H e precisamos encontrar outra forma Â´para calcular a derivada.

Em primeiro lugar, observe que: $F(X_0 + H) = F(X_0) + AH + erro(H)$ é uma equação que iguala dois vetores de $\mathbb{R}^m$. Escrevendo cada linha da equação temos:

$$\begin{array}{lcl} f_1(X_0+H) & = & f_1(X_0) + a_{11}h_1 + a_{1,2}h_2 + ...a_{1,n}h_n + erro_1(H) \\ f_2(X_0+H) & = & f_2(X_0) + a_{21}h_1 + a_{2,2}h_2 + ...a_{2,n}h_n + erro_2(H) \\ .... & = & .... \\ f_m(X_0+H) & = & f_m(X_0) + a_{m1}h_1 + a_{m,2}h_2 + ...a_{m,n}h + erro_n(H) \\ \lim_{\|H\|\to 0} & \frac{erro_i(H)}{\|H\|} = 0 & \end{array} \tag{2.24}$$

Exercício 2.3.4. Seja $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xyz, sen(z+x))$. Desenvolva as igualdades descritas em 2.24 para este exemplo particular.

Observe que podemos pensar no problema de determinar cada uma das linhas de forma independente. Isto é, determinar valores de a_ij que tornem a primeira equação de 2.24 verdadeira é um problema independente de determinar valores de a_{ij} que tornem outra linha de 2.24 verdadeira. De fato então, conseguimos reduzir o problema a considerar funções com contradomínio real apenas. Isto é, dada $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, queremos determinar coeficientes aij que tornem verdadeiras as equações :

$$f_i(X_0 + H) = f_i(X_0) + a_{i1}h_1 + a_{i,2}h_2 + ...a_{i,n}h_n + erro_i(H) \tag{2.25}$$

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{erro_i(H)}{\|H\|} = 0 \tag{2.26}$$

As igualdades devem ser verdadeiras para quaisquer valores de H e em particular podemos escolher $H = (0, 0, ..., h_j, 0...)$ e reescrever:

$$f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0 + h_j, ...x_n^0) = f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0, ...x_n^0) + a_{ij}h_j + erro_j(H) \tag{2.27}$$

$$\lim_{h_j\to 0} \frac{erro_j(H)}{\mid h_j \mid} = 0 \tag{2.28}$$

onde $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0, ...x_n^0)$.

Dividindo os dois lados de (2.27) por h_j e tomando o limite quando $h_j \to 0$ escrevemos:

$$\lim_{h_j\to 0} \frac{f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0 + h_j, ...x_n^0) - f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0, ...x_n^0)}{h_j} = \lim_{h_j\to 0} \tag{2.29}$$

e portanto:

$$a_{ij} = \lim_{h_j\to 0} \frac{f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0 + h_j, ...x_n^0) - f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0, ...x_n^0)}{h_j} \tag{2.30}$$

e concluímos que a_{ij} é a j-ésima derivada parcial da i–ésima função coordenada de f. Portanto a matriz A procurada é:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ .... & ... & .... & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{array} \right) \tag{2.31}$$

Exercício 2.3.5. Para cada uma das funções abaixo calcule a derivada no ponto X_0 dado:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + \sin xy \;\; X_0 = (\Pi/4, 2) \\ f(x,y,z) &= (x-y, x+z) \;\; X_0 = (x^*, y^*, z^*) \\ f(x) &= (x, x^2, \cos x) \;\; X_0 = 2 \\ f(x,y,z,w) &= (\ln xy, x-y, z^2 w) \;\; X_0 = (1,2,-1,3) \end{aligned}$$

Observação : Uma condição suficiente para a existência da derivada em X_0 é que todas as derivadas parciais existam e sejam contínuas em X_0.

Exercício 2.3.6. Determine os pontos em que as funções definidas a seguir são diferenciáveis.

$$a) f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad b) f(x,y) = \ln(1-x-y) \quad c) fxy = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

Exercício 2.3.7. Mostre que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é diferenciável aí.

Exercício 2.3.8. Dada a função :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em todo o seu domínio.

Todo o texto anterior foi escrito para que pudéssemos escrever

$$F(X_0 + H) \simeq F(X_0) + DF(X_0)H \tag{2.32}$$

O lado esquerdo de (2.32) é a função F em vizinhança de X_0. O lado direito descreve uma função afim (transformação linear mais constante). Está expressa, portanto uma comparação entre duas funções , que, de acordo com (2.32) devem ser "próximas". Isto é, a diferença entre as duas é um vetor de norma pequena. Denote por $L(H) = F(X_0) + Df(X_0)H$.

Exercício 2.3.9. Suponha que f é uma função real com contradomínio real. Esboce um gráfico qualquer para f. Fixe x_0 no domínio de f. Para este valor de x_0, no mesmo espaço que você esboçou o gráfico, esboce o gráfico de $L(H)$.

Exercício 2.3.10. Considere $f(t) = (t, 1/t)$, $t > 0$. Esboce a imagem de f. Escolha $t_0 = 2$. Observe que $Df(2) = (1, -1/4)$. Assim, $L(H) = (2, 1/2) + (1, -1/4)H$. Esboce a imagem de L e compare com a imagem de f. Esboce os gráficos de L e f e compare.

Exercício 2.3.11. Para cada uma das funções abaixo, faça:
a) Esboce a imagem de f e se possível o gráfico de f.
b) Para um valor arbitrário t_0, esboce a imagem de $L(H)$ e se possível o seu gráfico.

$$\begin{array}{llllllllll} a) & f(t) & = & (2t,4t) & t\in\mathbb{R} & b) & f(t) & = & (t,2t) & t\in\mathbb{R} \\ c) & f(t) & = & (t,\operatorname{sen}(t)) & t\in\mathbb{R} & d) & f(t) & = & (t^2,2t^2) & t\in\mathbb{R} \\ e) & f(t) & = & (2t,4t,3t) & t\in\mathbb{R} & f) & f(t) & = & (\operatorname{sen}(t),\cos(t)) & t\in\mathbb{R} \\ g) & f(t) & = & (e^t,t) & t\in\mathbb{R} & h) & f(t) & = & (t,ln(t),ln^2(t)) & t\in\mathbb{R} \end{array}$$

Os exercícios anteriores, se propoem a convencer você de que: **Se $\gamma(t)$ é uma curva parametrizada, então $D\gamma(t_0)$ é a direção tangente à γ em $\gamma(t_0)$.** Se você não achou esta afirmação óbvia, converse com o seu professor.

Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Fixe $X_0=(x_0,y_0)$ no domínio de f. fixando y_0 e deixando x variar, parametrizamos uma curva $\gamma(x)=(x,y_0,f(x,y_0))$ contida no gráfico de f. O vetor tangente à esta curava é dado por $\gamma'(x)=(1,0,f_x(x,y_0))$. Em particular, no ponto X_0, a direção tangente à γ é $\gamma'(x_0)=(1,0,f_x(X_0))$. Analogamente, fixando x_0 e deixando y variar, descrevemos uma curva $\zeta(y)=(x_0,y,f(x_0,y))$ contida no gráfico de f com vetor tangente $\zeta'(y)=(0,1,f_y(x_0,y))$. Em particular, no ponto X_0, a direção tangente à ζ é: $\zeta'(y_0)=(0,1,f_y(X_0))$. Observe que as duas direções tangentes são l.i. e estão contidas no plano tangente ao gráfico de f (porquê?). Assim, as duas direções geram um plano que é paralelo ao plano tangente ao gráfico de f em $(X_0,f(X_0))$ e portanto o vetor normal ao plano é dado por $\gamma'(x_0)\times\zeta'(y_0)$ onde "$\times$"denota o produto vetorial. fazendo a conta temos: $\gamma'(x_0)\times\zeta'(y_0)=(-f_x(X_0),-f_y(X_0),1)$ e portanto o plano tangente ao gráfico de f em $(X_0,f(X_0))$, tem equação :

$$-f_x(X_0)(x-x_0)-f_y(X_0)(y-y_0)+z-f(X_0)=0 \tag{2.33}$$

Exercício 2.3.12. Para cada uma das funções abaixo, calcule a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(X_0,f(X_0))$.

$$\begin{array}{llllllll} a) & f(x,y) & = & \cos(xy) & X_0=(\pi/3,\pi/2) & b)f(x,y) & = & \exp x^2+y \quad X_0=(2,-1) \\ a) & f(x,y) & = & sec(x-y) & X_0=(\pi/3,\pi/2) & b)f(x,y) & = & (x^2+2y^4) \quad X_0=(2,-1) \end{array}$$

2.4 O vetor gradiente.

Considere uma função f com domínio em $\mathbb{R}^n$ e contradomínio em $\mathbb{R}$ a derivada de f é a matriz $(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$. Este (único), vetor linha desta matriz é chamado **gradiente de f)** e usualmente denotado por ∇f.

Exercício 2.4.1. Para cada uma das funções abaixo, calcule ∇f no ponto X_0 dado:

$$a)\quad f(x,y) = (x^3y) \quad X_0=(1,2) \quad b)\quad f(x,y,z) = ln(\sqrt{x^2-y}+z^2 \quad X_0=(-1,0,3)$$

2.5 A Regra da Cadeia

Seja $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $G:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$, lembramos que se G é diferenciável em X_0 e F é diferenciável em $Y_0=G(X_0)$, então $D(F\circ G)(X_0)=DF(Y_0).G(X_0)$ onde "."denota o produto usual de matrizes.

Exercício 2.5.1. Pedrinho queria escrever a regra da cadeia em uma prova. Escreveu: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, lembramos que se G é diferenciável em X_0 e F é diferenciável em $Y_0 = G(X_0)$, então $D(F \circ G)(X_0) = DF(Y_0).G(X_0)$ onde "."denota o produto usual de matrizes. Em que condições Pedrinho pode estar certo?

Exercício 2.5.2. Pedrinho apagou a frase descrita no exercício acima e tentou outra vez: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, lembramos que se G é diferenciável em X_0 e F é diferenciável em $Y_0 = G(X_0)$, então $D(F \circ G)(X_0) = DF(X_0).DG(X_0)$ onde "."denota o produto usual de matrizes.

Exercício 2.5.3. No enunciado da regra da cadeia, quantas linhas e quantas colunas tem cada um das matrizes $DF(Y_0)$ e $DG(X_0)$? Quantas linhas e quantas colunas tem o seu produto? De acordo com as dimensões do domínio e Imagem da função $F \circ G$, quantas linhas e quantas colunas deveria ter sua derivada ?

Exercício 2.5.4. Pedrinho resolveu escrever a regra da cadeia de novo e escreveu: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, lembramos que se G é diferenciável em X_0 e F é diferenciável em $Y_0 = G(X_0)$, então $D(F \circ G)(X_0) = DG(X_0).DF(Y_0)$ onde "."denota o produto usual de matrizes. A professora de Pedrinho, sempre intransigente e malvadérrima, descontou 35 pontos e disse que o erro estava na parte: $D(F \circ G)(X_0) = DG(X_0).DF(Y_0)$ pois o correto seria: $D(F \circ G)(X_0) = DF(Y_0).DG(X_0)$. Pedrinho achou aquilo pura perseguição pois pensou que a ordem dos fatores não altera o produto. Quem tem razão?

Exercício 2.5.5. Considere as funções $f(x, y) = (xy, x^2 + y, x - y)$ e $g(u, v, w) = 2wln(uv)$. Seja $h(s)$, $s \in \mathbb{R}$, uma função cuja imagem é um subconjunto dos reais. Considere $H(x, y) = h \circ g \circ f(x, y)$.

- Para que valor(es) de s se deve conhecer $h'(s)$ para que se possa calcular $\partial H/\partial x(1, 3)$?
- Supondo que tal valor é 5, calcule $\partial H/\partial x(1, 3)$.

Exercício 2.5.6. Sejam $f(x, y) = e^{xy}$, $g(t) = cos(t)$, $h(t) = sen(t)$. Defina $f(t) = f(g, h)$. Calcule $f'(0)$.

Exercício 2.5.7. Se $u = x^m f(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}) = mu$ mostre que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu$.

Exercício 2.5.8. Sejam g e h funções diferenciáveis e defina: $f(r, s) = (g(r, s))^{h(r,s)}$. Assuma que $g(1, 2) = 2$, $h(1, 2) = -2$, $g_r(1, 2) = -1$, $g_s(1, 2) = 3$, $h_1(1, 2) = 5$ e $h_2(1, 2) = 0$. Encontre f_r e f_s no ponto $(1, 2)$.

Exercício 2.5.9. Seja $w = \int_x^y e^{t^2} dt$ e suponha que $x = rs^4$ e $y = r^4 s$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial r}$.

Suponha que f é uma função com domínio em $\mathbb{R}^n$ e imagem em $\mathbb{R}$ e seja $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ uma curva contida no conjunto de nível k de f. Fixe $X_0 = \gamma(t_0)$ um ponto em $\gamma(t)$. A função $g(t) = f \circ \gamma(t)$ é uma função real de uma variável e é constante, igual a k, pois $\gamma(t)$ está contida no conjunto de nível k de f. Concluímos então que $g'(t) \equiv 0$ e em particular, $g'(t_0) = 0$. Pela regra da cadeia, podemos escrever:

$$g'(t_0) = \nabla f(X_0).\gamma'(t_0) \tag{2.34}$$

e portanto, $\nabla f(X_0).\gamma'(t_0) = 0$. Se $\nabla f(X_0) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ então $\nabla f(X_0)$ é ortogonal à $\gamma'(t_0)$. Já vimos que $\gamma'(t_0)$ é tangente à curva $\gamma(t)$ em $\gamma(t_0)$ e como γ é uma curva qualquer em um conjunto de nível de f, concluímos: **O vetor gradiente é normal aos conjuntos de nível.**

Exercício 2.5.10. Marcelinho, amigo intelectual de Pedrinho, achou a conclusão acima mal formulada. Fez as seguintes perguntas:

- O que quer dizer que "um vetor é normal à um conjunto"? De fato, sei o que quer dizer um vetor ser normal à outro vetor ...
- O que quer dizer um "vetor ser normal *aos* , conjuntos "? É ortogonal a vários conjuntos ao mesmo tempo ?

Responda cuidadosamente às perguntas de Marcelinho.

Exercício 2.5.11. Obtenha a equação do plano tangente à superfície $z\cos(x) - y \exp xyz = 1$ em no ponto $(2\pi, 1, 0)$.

Exercício 2.5.12. Duas superfícies, S_1 e S_2 se tam ao longo de uma curva diferenciável γ. S_1 é gráfico de uma função $z = f(x, y)$ e S_2 é conjunto de nível 3 de $h(x, y, z)$. Para um ponto genérico $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \gamma$, obtenha a equação da reta tangente à curva, em função das derivadas parciais de f e h.

Suponha que S é uma superfície definida explicitamente por $z = f(x, y)$ e que f é diferenciável. A função $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ define S implicitamente. Assim concluímos que ∇g é normal à S. Mas $\nabla g = (-f_x, -f_y, 1)$ e concluímos que o vetor normal ao gráfico de f é dado por $(-f_x, -f_y, 1)$. Observe que esta conclusão não é nova. Quando estudamos derivadas parciais já tínhamos chegado a este mesmo resultado.

Exercício 2.5.13. As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto $(2\pi, \pi)$, formando um ângulo de $\pi/2$.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \{(x, y)\text{tais que } xy - \operatorname{sen}(x - 2y) = 2\pi^2\} \\ \gamma_2 &:= \{(x, y)\text{tais que} y = f(x)\} \end{aligned}$$

Encontre um valor possível para $f'(\pi)$.
Quantas soluções você encontra para este problema ?
Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é $\pi/6$.

Exercício 2.5.14. Seja $f(x, y, z)$ uma função cujo gradiente é dado em todos os pontos por: $\nabla f(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Esboce os conjuntos de nível de f.

2.6 Derivadas direcionais

Dado um ponto X_0 no domínio de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podemos pensar em calcular a a variação de f em alguma direção . Isto é, imagine–se parado em X_0 e suponha que você decida dar um passo na direção de um vetor unitário (norma igual a 1) u. Se o seu passo tem "tamanho"t, a variação será dada por $f(X_0 + tu) - f(X_0)$. O problema com essa expressão é que ela depende do tamanho do passo. Ou seja, passos grandes tendem a indicar uma variação grande e passos pequenos tendem a indicar uma variação próxima de zero se a função for contínua (por quê?). Suponha, entretanto, que você quer responder a seguinte pergunta: *dando passos de tamanhos diferentes em várias direções , em qual delas a variação de f será maior (ou menor)?*. A medida correta para a variação , será então: $\frac{f(X_0+tu)-f(X_0)}{t}$. Se quisermos ter uma noção de como f varia para passos muito pequenos (pequena variação no domínio), chegaremos a expressão:

$$lim_{t\to 0}\frac{f(X_0+tu)-f(X_0)}{t}$$

e este valor, quando existe, é chamado derivada direcional de f em X_0 na direção de u. A notação mais comum para derivada direcional é $\frac{df}{du}(X_0)$. Formalmente definimos:

Definição 2.6.1. Define–se a derivada direcional de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em um ponto X_0 na direção do vetor unitário u como sendo:

$$\frac{df}{du}(X_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(X_0+tu)-f(X_0)}{t} \tag{2.35}$$

quando o limite existe e é finito

Exercício 2.6.1. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um ponto X_0, mostre que se u é o vetor cuja i–ésima coordenada vale 1 e as outras valem 0, então $\frac{df}{du}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$.

A expressão (2.35) é pouco operacional e vamos tentar reescrevê–la. Pela definição de derivada, sabemos que se f é diferenciável em X_0 então, para valores pequenos de t escrevemos:

$$f(X_0+tu) = f(X_0) + \nabla f(X_0).u + resto(tu) \tag{2.36}$$

Substituindo em (2.35) temos:

$$\frac{df}{du}(X_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(X_0) + \nabla f(X_0).u + resto(tu) - f(X_0)}{t} \tag{2.37}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{df}{du}(X_0) &= lim_{t\to 0}\frac{\nabla f(X_0).u + resto(tu)}{t} \\ &= lim_{t\to 0}\nabla f(X_0).u + lim_{t\to 0}\frac{resto(tu)}{t} = \\ &= \nabla f(X_0).u \end{aligned} \tag{2.38}$$

e concluímos que se f é diferenciável a derivada direcional de f na direção de u é dada por $\nabla f(X_0).u$.

Exercício 2.6.2. Para cada uma das funções abaixo, calcule a derivada direcional na direção do vetor v no ponto X_0. (Obs: Lembre -se de calcular o vetor unitário !!!!!)

$$\begin{array}{llll} a) & f(x,y,z) & = & (x^2-3y+z^3), \quad X_0=(1,2,-1), \quad v=(1,1,1) \\ b) & f(x,y) & = & \text{sen}(xy^2), \quad X_0=(\pi,3/2), \quad v=(-1,2) \\ c) & f(x,y,z) & = & actg(x-y+z), \quad X_0=(3,2,-1), \quad v=(1,0,1) \end{array}$$

Suponha que $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ é uma curva parametrizada no domínio de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. É natural nos perguntarmos qual seria a variação de f ao longo da curva. Como $\gamma'(t)$ é o vetor tangente à curva, em cada ponto, o vetor unitário na direção da curva em cad ponto pode ser tomado como $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ desde que $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0, 0, ...)$..Neste caso, a variação da função ao longo da curva será dada por $\nabla f(\gamma(t)).\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

Exercício 2.6.3. Sejam f e γ como no parágrafo anterior. Observe que a função $f \circ \gamma(t)$ é uma função real, de variável real, que consiste na restrição da função f à curva γ. Calcule a taxa de variação desta função pela regra da cadeia. Compare com a taxa de variação obtida anteriormente.

Seja f como no exercício anterior e seja $\mathcal{C}$ um conjunto de nível de f. Seja $\gamma(t)$ uma curva contida em $\mathcal{C}$. É claro que $f \circ \gamma(t)$, é função real de variável real. Além disso, $f \circ \gamma(t)$ é uma função constante pois a curva está contida em um conjunto de nível de f. Assim, pela teoria de cálculo de uma variável $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \equiv 0$. Mas $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \equiv 0 \Rightarrow \nabla f.\gamma(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t))\frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \equiv 0$. Esta equação tem as seguintes interpretações óbvias: primeiro, f não varia na direção de γ o que é natural pois γ está contida em um conjunto de nível de f; segundo, o gradiente de f é ortogonal à γ o que também já sabemos.

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e fixe X_0 no domínio de f. Suponha que $\nabla f(X_0) \neq (0, 0, \cdots 0)$. Seja u um vetor unitário. Sabemos que o produto $\nabla f(X_0).u$ mede a taxa de variação de f na direção de u. Gostaríamos de nos perguntar em que direção esta taxa é máxima. Sabemos que $\nabla f(X_0).u = \|\nabla f\|\|u\|cos\theta$ onde θ é o ângulo formado pelos vetores gradiente e u. A variação será máxima, portanto, quando $\cos(\theta)$ for igual à 1.

Exercício 2.6.4. Mostre que o gradiente de uma função aponta no sentido de crescimento máximo da função . Qual o sentido de decrescimento máximo?

exercícios diversos

Exercício 2.6.5. Seja $w = x^2 + y^2 - z^2$ onde $x = \rho\text{sen}\varphi\text{cos}\theta$, $y = \rho\text{sen}\varphi\text{sen}\theta$ e $z = \rho\text{cos}\varphi$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial w}{\partial \rho}$ e$\frac{\partial w}{\partial \theta}$

Exercício 2.6.6. Sejam $x = 2u + 3v$ e $y = u + e^{4v}$. Considere uma função F de duas variáveis e defina $F(u, v) = f(x, y)$ onde $f(6, 4) = -3$, $f_1(6, 4) = 4$ e $f_2(6, 4) = -5$. Calcule $F_u(3, 0)$ e $F_v(3, 0)$.

Exercício 2.6.7. Seja $H(x, y, z) = \sqrt{L(x, y, z)}$ onde $L(0, 0, 0) = 9$, $L_x(0, 0, 0) = 5$, $L_y(0, 0, 0) = 4$ e $L_z(0, 0, 0) = -3$. Calcule H_x, H_y e H_z em $(0, 0, 0)$.

Exercício 2.6.8. Seja F a função que mede a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^n$. Calcule a derivada de F.

Exercício 2.6.9. Seja $f(x, y, z) = z - e^x\text{sen}(y)$ e $P = (ln(3), 3\pi/2, -3)$. Ache:
a) $\nabla f(P)$, b) a reta normal à superfície de nível que contém P, c) O plano tangente à esta superfície em P.

Exercício 2.6.10. Seja $f(x,y,z) = z - e^x\text{sen}(y)$ e $P = (ln(3), 3\pi/2, -3)$. Ache: a) $\nabla f(P)$, b) a reta normal à superfície de nível que contém P, c) O plano tangente à esta superfície em P.

Exercício 2.6.11. Determine o plano tangente e a reta normal à superfície no ponto indicado:

$$\begin{array}{lll} a) & x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0 & em \quad P = (2,-3,4) \\ b) & \text{sen}(xy) + \text{sen}(yz) + \text{sen}(xz) = 1 & em \quad P = (1, \pi/2, 0) \end{array}$$

Exercício 2.6.12. Determine a reta tangente à curva de interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ e $x^2 + y^2 = 13$ em $(3, 2, 6)$.

Exercício 2.6.13. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ em $(3, -4, 3/5)$.

Exercício 2.6.14. Uma função $f(x,y)$ é dita harmônica se satisfaz a equação de Laplace: $\Delta f = f_x x + f_y y = 0$. Mostre que as funções a seguir são harmônicas.

$$\begin{array}{ll} a) & f(x,y) = ln(x^2 + y^2) \\ b) & f(x,y) = e^x\text{sen}(y) + e^y\cos(x) \\ c) & f(x,y) = \text{arctg}(y/x) \end{array}$$

Exercício 2.6.15. Mostre que $U(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ onde a é constante e f e g são duas vezes diferenciáveis é solução da equação : $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$.

Exercício 2.6.16. Seja $u(x,t)$ uma função que satisfaz o problema:

$$\begin{cases} u_t + 9u_x = 0 \\ u(x,0) = x^3 + 2 \end{cases}$$

Calcule $u(x,t)$ em um ponto (x,t) qualquer.

Exercício 2.6.17. Seja $g(u,v) = f(u+v, uv)$, f diferenciável, $x = u+v$, $y = uv$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)$ e $\frac{\partial g}{\partial u \partial v}(1,1)$, sabendo que: $f_x(2,1) = 3$, $f_y(2,1) = -3$, $f_{xx}(2,1) = 0$, $f_{xy}(2,1) = f_{yx}(2,1) = 1$ e$f_{yy}(2,1) = 2$

Exercício 2.6.18. Verifique se a função $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisfaz a equação de Laplace em 3 dimensões: $\Delta f = f_x x + f_y y + f_z z = 0$.

Exercício 2.6.19. Se a, b, c e k são constantes mostre que $w = (a\cos(cx) + b\text{sen}(cx))e^{-kc^2t}$ é uma solução da equação do calor: $w_t = k w_{xx}$.

Exercício 2.6.20. Se u e v são funções de x e y e satisfazem as equações de Cauchy–Riemann, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ mostre que $u_x x + u_y y = 0$, se todas as derivadas parciais existirem e forem contínuas.

Exercício 2.6.21. Suponha que $f(x,t)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$ onde $c \neq 0$ é uma constante. Determine constantes m, n, p e q para que $g(u,v) = f(x,t)$ onde $x = mu + nv$ e $t = pu + qv$, satisfaça a equação : $\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial v}$

Exercício 2.6.22. Suponha que $x = u + v^2$, $y = 3u - v^2$, e seja $g(u, v) = f(x, y)$. Calcule $\partial^2 g/\partial v^2(-1, 2)$ sabendo que :

$$\begin{array}{lll} f_x(-1,2) = 1 & f_y(-1,2) = e & \\ f_{xx}(-1,2) = -2 & f_{yy}(-1,2) = 0 & f_{xy}(-1,2) = 3 \\ f_x(-3,7) = 5 & f_y(-3,7) = \pi & \\ f_{xx}(-3,7) = \sqrt{3} & f_{yy}(-3,7) = 4 & f_{x,y}(-3,7) = -1. \end{array}$$

Exercício 2.6.23. Pedrinho estudou cuidadosamente uma função $f(x, y)$ e concluiu que:

a) Os conjuntos de nível k de f são os círculos $x^2 + y^2 = k$;

b) $\nabla f(1, 0) = (-2, 0)$

Critique as conclusões de Pedrinho.

Exercício 2.6.24. Pedrinho reestudou a função e concluiu:

a) Os conjuntos de nível k de f são os círculos $x^2 + y^2 = k$;

b) $\nabla f(1, 0) = (2, 3)$

Será que Pedrinho ten razão?

Exercício 2.6.25. Considere $z = z(x, y)$, $x = e^u\cos(v)$ e $y = e^u\text{sen}(v)$. Suponha que $\nabla z = 0$. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

Exercício 2.6.26. Sendo $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 2, 1)$ na direção de $u = (4, -2, 4)$.

Exercício 2.6.27. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem no ponto $(1, 1)$ derivada direcional igual a 3 na direção do vetor $(3, 4)$ e igual a -1 na direção de $(4, -3)$. Calcule $\nabla f(1, 1)$.

Exercício 2.6.28. Pedrinho fez as afirmações a seguir. Critique.

- A derivada de uma função é sempre tangente à função .
- Se uma função parametriza uma curva então $\nabla\gamma$ é normal à curva.
- O plano tangente ao gráfico de uma fc é gerado pelas colunas de Df.
- Se $\mathcal{C}$ é conjunto de nível de f então em todo ponto de $\mathcal{C}$ a derivada de f é tangente.
- As derivadas parciais de f sempre medem a direção da reta tangente ao gráfico de f.
- Sejam S_1 e S_2 superfícies de nível de, respectivamente, $f_1(x, y, z)$ e $f_2(x, y, z)$. Suponha que $S_1 \cap S_2$, define uma curva. Então ∇f_1 e ∇f_2 são tangentes à curva em cada ponto.
- Considere duas superfícies como no ítem anterior. $\nabla f_1 \times \nabla f_2$ é tangente ‘a curva.
- Se f tem derivada direcional em qualquer direção , então f é diferenciável.

- Seja S o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Fixe X_0 em S. O vetor $(f_x, f_y)(X_0)$ é tangente a alguma curva contida em S.
- Existe uma transformação linear $T : U \to V$, onde U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tal que T não é diferenciável na origem.
- Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são transformações lineares cuja matriz na base canônica é dada respectivamente por $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ e $\mathcal{M}_\mathcal{L}$, a derivada de $T \circ L$ é $\mathcal{M}_\mathcal{T}.\mathcal{M}_\mathcal{L}$ onde "."denota o produto usual de matrizes.

2.7 Teorema da Função Implícita

Lembre que uma reta em $\mathbb{R}^2$ pode ser dada:

(a) explicitamente (reta não vertical) por uma equação da forma $y = ax + b$, *i.e.*, pelo gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$;

(b) implicitamente por uma equação da forma $ax + by = c$, *i.e.*, pela curva de nível zero de $F(x, y)$, onde $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = ax + by - c$ e

(c) parametricamente pelo conjunto $\{(at + b, bt + c), t \in \mathbb{R}\}$, *i.e.,* pela imagem de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (at + b, bt + c)$.

Da mesma forma, um círculo com centro em $(0, 0)$ (ou parte dele) em $\mathbb{R}^2$ pode ser dado

(a) explicitamente por uma equação da forma $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, *i.e.*, pelo gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (semicírculo);

(b) implicitamente por uma equação da forma $x^2 + y^2 = r^2$ *i.e.*, pela curva de nível zero de $F(x, y)$, onde $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$; e

(c) parametricamente pelo conjunto $\{(r \cos t, r\,\mathrm{sen} t), 0 \le t \le 2\pi\}$, *i.e.*, pela imagem de $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (r \cos t, r\,\mathrm{sen} t)$.

Em $\mathbb{R}^n$, podemos definir superfícies de dimensão n como :

(a) gráficos de funções $f : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$: (representação explícita);

(b) conjuntos de nível de funções $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (representação implícita) ou

(c) imagem de funções $f : D \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n, k < n$ (representação paramétrica).

Observe que as formas implícita e paramétrica, permitem definir superfícies que são impossíveis de definir explicitamente, *e.g.*, um círculo em $\mathbb{R}^2$, uma esfera em $\mathbb{R}^3$.

Caso uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ seja dada implicitamente por $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = 0$, e exista $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$, então dizemos que a equação $F(x, y, z) = 0$ define z implicitamente em função de x e y. Não é necessário que o gráfico de f contenha todos os pontos de S. Veja:

Exemplo 2.7.1. Seja $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; F(x,y,z) = 0\}$. Note que as funções $f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ e $f_2(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ satisfazem $F(x,y,f_k(x,y)) = 0$. Assim, numa vizinhança aberta de $(0,0,1)$, f_1 define explicitamente um subconjunto de S e numa vizinhança aberta de $(0,0,-1)$, f_2 define explicitamente outro subconjunto de S. Logo, a função f define z implicitamente como função de x e y.

Vamos então , dada a superfície dada por $F : D_1 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x) = 0$, que define z implicitamente como função de (x,y), via $f : D_2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = z$, definir uma função auxiliar, $g : D_2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, g(x,y) = F(x,y,f(x,y))$.

Quando a função f é diferenciável, mesmo sem sabermos z explicitamente em função de (x,y), é possível, via regra da cadeia, obter várias informações sobre f. Veja (lembre que $g(x,y) \equiv 0$ em S):

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$0 = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \text{se } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Acabamos de mostrar que:

Teorema 2.7.1. *(Função Implícita (1)) Se $F : D_1 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $A \subset D_1$ e a equação $F(x) = 0$ define implicitamente $z = f(x,y)$ como função diferenciável para $(x,y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$, então as derivada parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são dadas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$$

nos pontos (x,y) tais que $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \neq 0$.

Exemplo 2.7.2. Suponha que $F(x,y,z) = x^2+xz+2z^2-2y-e^z-c = 0$ define z implicitamente como função de (x,y), $z = f(x,y)$. Obtenha um valor de c para o qual $f(0,1) = 1$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

***S**olução* . $F(0,1,f(0,1)) = F(0,1,1) = 2-2-e-c = -e-c$, portanto escolha $c = -e$.

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 2x+z, \quad \text{logo} \quad \frac{\partial F(0,1,f(0,1))}{\partial x} = \frac{\partial F(0,1,1)}{\partial x} = 1;$$
$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = -2, \quad \text{logo} \quad \frac{\partial F(0,1,f(0,1))}{\partial y} = \frac{\partial F(0,1,1)}{\partial y} = -2;$$
$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = x+4z-e^z, \quad \text{logo} \quad \frac{\partial F(0,1,f(0,1))}{\partial z} = \frac{\partial F(0,1,1)}{\partial z} = 4-e \neq 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{e-4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{2}{4-e}.$$

Extensão :

Teorema 2.7.2. *(Função Implícita (2)) Se $F : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $A \subset D_1$ e a equação $F(x) = 0$ define implicitamente $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ como função diferenciável de $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, para $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, então para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ é dada por*

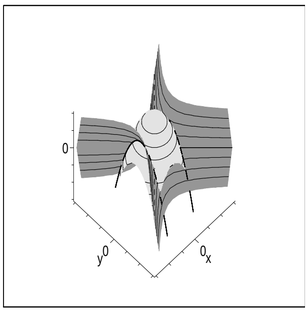
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))}$$

nos pontos em que $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \neq 0$.

Exemplo 2.7.3. Sejam S_1 dada por $x^2 + y^2 + z - 2 = 0$, S_2 dada por $x^2 - y^2 - z = 0$ e Γ a interseção de S_1 e S_2. Parametrize Γ numa vizinhança de (1,0,1).

Solução . Γ é dada por $z = x^2 - y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$. Equivalentemente, Γ é dada por $z = x^2 - y^2$ e $2x^2 - 2 = 0$, isto é, $z = 1 - y^2$ e $x^2 = 1$. Assim, $t \longmapsto (1, t, 1 - t^2)$ parametriza Γ numa vizinhança de $(1, y, z)$ e $t \longmapsto (-1, t, 1 - t^2)$ parametriza Γ numa vizinhança de $(-1, y, z)$.

Veja a figura:



Sejam S_1 e S_2 superfícies dadas implicitamente pelas equações

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Seja Γ a curva obtida pela interseção de S_1 e S_2. Assim, podemos descrever Γ parametricamente resolvendo as equações $F_1(x, y, z) = 0$ e $F_2(x, y, z) = 0$ em termos de uma das variáveis x, y ou z. Suponha que seja possível escrever $x = X(z)$ e $y = Y(z)$, para $z \in (a, b)$. Então $F_1(X(z), Y(z), z) = F_2(X(z), Y(z), z) = 0$, $z \in (a, b)$.

Sejam $f_1(z) = F_1(X(z), Y(z), z)$ e $f_2(z) = F_2(X(z), Y(z), z)$. Então $f_1(z) = f_2(z) = 0$ se $z \in (a, b)$ e portanto ${f_1}'(z) = {f_2}'(z) = 0$ se $z \in (a, b)$. Assim, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
0 = {f_1}'(z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F_1}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial F_1}{\partial z} \\
0 = {f_2}'(z) &= \frac{\partial F_2}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F_2}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial F_2}{\partial z}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F_1}{\partial y} Y'(z) &= -\frac{\partial F_1}{\partial z} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F_2}{\partial y} Y'(z) &= -\frac{\partial F_2}{\partial z}
\end{aligned}$$

Matricialmente, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{dz} \\ \\ \frac{dY}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \\ -\frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Caso o determinante da matriz $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ seja não nulo, é possível resolver esse sistema de equações e obter

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dz} \\ \\ \frac{dY}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \\ -\frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dz} \\ \\ \frac{dY}{dz} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y} & -\frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Os determinantes acima são Jacobianos. É usual denotar o determinante da derivada da função $(x, y) \longrightarrow (F_1(x, y), F_2(x, y))$ por $\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}$. Assim,

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, y)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}}$$

Exemplo 2.7.4. (exemplo 2.7.3 revisitado) Use o resultado e as notações acima, para obter $\dfrac{dy}{dz}$ para $Y(z)$ a função do exemplo 2.7.3. Refaça o problema usando a expressão de $Y(z)$.

Solução . Seja $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 2$, $F_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$. Assim, S_1 e S_2 são as superfícies de nível zero de F_1 e F_2.

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}} = \frac{-4x}{-8xy} = \frac{-1}{2y}$$

Por outro lado, $t \longrightarrow (1, t, 1 - t^2)$ parametriza $\Gamma = S_1 \cap S_2$ numa vizinhança de $(1, y, z)$ e $t \longrightarrow (-1, t, 1 - t^2)$ parametriza Γ numa vizinhança de $(-1, y, z)$. Logo, fazendo $z = 1 - t^2$, temos que $t = Y(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}; & y \geq 0 \\ -\sqrt{1 - z}; & y \neq 0 \end{cases}$

Portanto, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{-1}{2y}$

Extensão :

Teorema 2.7.3. *(Função Implícita (3)) Se $F : D_1 \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 no aberto $A \subset D_1$ e tal que para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$,*

(a) $F(x_0, y_0) = 0$;

(b) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$ *é inversível,*

então existe vizinhança V de x_0 e $f : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in V$. Mais:

$$f'(x) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} (x, f(x)) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x, f(x))$$

Exercício 2.7.1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$ e calcule y' e y' no ponto $P_0 = (1, 1)$.

Exercício 2.7.2. O ponto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisfaz as equações $xyt + \operatorname{sen}(xyt) = 0$ e $x + y + t = 0$. É possível definir x e y implicitamente como função de t numa vizinhança de $(0, 1, -1)$?

Exercício 2.7.3. Considere a equação $(x-2)^3 y + xe^{(y-1)} = 0$. y está definido implicitamente como função de x numa vizinhança de

1. (1,1) ?
2. (0,0) ?
3. (2,1) ?

Exercício 2.7.4. Obtenha $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x, y) = z$ dada implicitamente por:

1. $\ln(xyz) + e^z = 1$
2. $xz^2 - 3yz + \cos(z) = 0$

Exercício 2.7.5. Se $X(u, v)$ e $Y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema de equações

$$\begin{cases} u = x + y; \\ v = \dfrac{y}{x}; \qquad x \neq 0 \end{cases}$$

mostre que $\dfrac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 1$.

Exercício 2.7.6. Calcule:

1. $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$, sendo $u = xyz$ e $v = x^2 + y^2$
2. $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, sendo $x = u^2 - v^2$ e $y = u + v$
3. $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$, sendo $x = u + v + w$, $y = 2u - v$ e $z = 2v - w$.

Exercício 2.7.7. Seja $g(u,v) = f(X(u,v), Y(u,v))$, onde $X(u,v)$ e $Y(u,v)$ são dadas implicitamente por $u = x^2 + y^2$ e $v = xy$.

1. Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

2. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ se $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercício 2.7.8. Se $v = x^2 + uy^2$ e $u = x + y^2$ definem $x = X(u,v)$ e $y = Y(u,v)$ implicitamente, obtenha uma expressão para $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ em termos de x, y e u.

Exercício 2.7.9. Se $y = Y(x)$ e $z = Z(x)$ com $z > 0$ são diferenciáveis e dadas por $x^2+y^2+z^2 = 2$ e $x + y = 1$, determine $\dfrac{dy}{dx}(0)$ e $\dfrac{dz}{dx}(0)$.

Capítulo 3

Fórmula de Taylor

3.1 Aproximações de grau 2 para funções de uma variável

Já sabemos que a melhor aproximação de grau 1 de f, função diferenciável de uma variável, numa vizinhança de x_0 é dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Lembre que o gráfico de $L(x)$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e observe que L é um polinômio de grau 1. O erro desta aproximação é dado por:

$$\text{erro}_1(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Note que $\lim_{x \to x_0} \text{erro}_1(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \dfrac{\text{erro}_1(x)}{x - x_0} = f'(x_0)$.
Agora vamos obter o polinômio de grau 2,

$$P_2(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 \tag{3.1}$$

que melhor aproxima f, numa vizinhança de x_0. Assim, queremos obter a, b e c constantes tais que $P_2(x) \simeq f(x)$, onde $\simeq$ lê-se como *aproximadamente igual*. De fato, queremos que a aproximação (3.1) seja tão mais verdadeira quanto mais próximo x estiver de x_0. Reescrevemos o problema como sendo: obtenha a, b e c tal que

$$f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \text{erro}_2(x) \tag{3.2}$$

$$\lim_{x \to x_0} \text{erro}_2(x) = 0 \tag{3.3}$$

É bastante razoável impormos que essa aproximação seja exata em x_0 e assim queremos também que:

$$\text{erro}_2(x_0) = 0 \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.2) temos que $f(x_0) = c$ e portanto:

$$f(x) - f(x_0) = b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \text{erro}_2(x) \tag{3.5}$$

é evidente que, quando x tende a x_0, o lado direito de (3.5) tende a zero. Isto implica que, se a nossa aproximação tem alguma chance de existir, f deve ser contínua em x_0. Além disso, se

$b\,(x-x_0)+c\,(x-x_0)^2$ tender a zero mais rápido que $\mathrm{erro}_2(x)$, teremos que, em vizinhança de x_0, $f(x)-f(x_0)$ será aproximada por $\mathrm{erro}_2(x)$ e não por $b\,(x-x_0)+c\,(x-x_0)^2$, como gostaríamos. Por esta razão , acrescentamos Ã nossa formulação do problema a exigência de que $\mathrm{erro}_2(x)$ deve tender a zero mais rápido que $b\,(x-x_0)+c\,(x-x_0)^2$. Uma maneira de exigir isso é impor que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{erro}_2(x)}{x-x_0}=0. \tag{3.6}$$

Dividindo os dois lados de (3.5) por $x-x_0$ vem:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b+c\,(x-x_0)+\frac{\mathrm{erro}_2(x)}{x-x_0} \tag{3.7}$$

Tomando o limite quando x tende a x_0 em (3.7), obtemos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b \tag{3.8}$$

Observe que então estamos exigindo que f seja derivável em x_0 e que

$$f'(x_0)=b \tag{3.9}$$

Substituindo em (3.5) e (3.1), temos que:

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=c\,(x-x_0)^2+\mathrm{erro}_2(x) \tag{3.10}$$

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+c\,(x-x_0)^2 \tag{3.11}$$

Note que então $P_2(x)=P_1(x)+c\,(x-x_0)^2$, onde $P_1(x)$ é a melhor aproximação de grau 1 de f. Em outras palavras, P_2 é uma aproximação de f pelo menos tão boa como a aproximação de grau 1. De novo, caso $c\,(x-x_0)^2$ tender a zero mais rápido que $\mathrm{erro}_2(x)$, teremos que, em vizinhança de x_0, $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ será aproximada por $\mathrm{erro}_2(x)$ e não por $c\,(x-x_0)^2$, como gostaríamos. Por isso, acrescentamos Ã nossa formulação do problema a exigência de que $\mathrm{erro}_2(x)$ deve tender a zero mais rápido que $c\,(x-x_0)^2$. Uma maneira de exigir isso é impor que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{erro}_2(x)}{(x-x_0)^2}=0 \tag{3.12}$$

Dividindo os dois lados de (3.10) por $(x-x_0)^2$ vem:

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=c+\frac{\mathrm{erro}_2(x)}{(x-x_0)^2} \tag{3.13}$$

Tomando o limite quando x tende a x_0 em (3.13) e usando (3.6), obtemos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=c \tag{3.14}$$

Para que esse limite exista, f' deve existir em vizinhança de x_0 e ser contínua em x_0. Mais ainda, usando L 'Hôpital no lado esquerdo de (14), obtemos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=c \tag{3.15}$$

Observe que então estamos exigindo que f seja duas vezes derivável em x_0 e que:

$$f'(x_0) = 2c \tag{3.16}$$

Substituindo em (3.10) e (3.11), temos que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \text{erro}_2(x) \tag{3.17}$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \tag{3.18}$$

3.2 Aproximações de grau n para funções de uma variável

Vamos obter o polinômio de grau 3,

$$P_3(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 \tag{3.19}$$

que melhor aproxima f, numa vizinhança de x_0. Assim, queremos obter a, b, c e d constantes tais que $P_3(x) \simeq f(x)$, onde $\simeq$ lê-se como *aproximadamente igual.* Novamente, queremos que a aproximação (19) seja tão mais verdadeira quanto mais próximo x estiver de x_0 e vamos exigir que essa aproximação seja pelo menos tão boa quanto Ã aproximação de grau 2. Assim, queremos que:

$$f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + \text{erro}_3(x) \tag{3.20}$$

$$\lim_{x \to x_0} \text{erro}_3(x) = 0 \tag{3.21}$$

$$\text{erro}_3(x_0) = 0 \tag{3.22}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{erro}_3(x)}{x - x_0} = 0 \tag{3.23}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{erro}_3(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \tag{3.24}$$

As condições (3.21) a (3.24), como já vimos, obrigam que f seja duas vezes diferenciável em x_0, $c = \dfrac{f'(x_0)}{2}$, $b = f'(x_0)$ e que $a = f(x_0)$, *i.e.*,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = d(x - x_0)^3 + \text{erro}_3(x) \tag{3.25}$$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 \tag{3.26}$$

De novo, caso $d(x - x_0)^3$ tender a zero mais rápido que mais rápido que $\text{erro}_3(x)$, teremos que, em vizinhança de x_0, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dfrac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ será aproximada por $\text{erro}_3(x)$ e não por $d(x - x_0)^3$, como gostaríamos. Por isso, acrescentamos Ã nossa formulação do problema a exigência de que $\text{erro}_3(x)$ deve tender a zero mais rápido que $d(x-x_0)^3$. Uma maneira de exigir isso é impor que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\text{erro}_3(x)}{(x-x_0)^3}=0 \tag{3.27}$$

Dividindo os dois lados de (3.25) por $(x-x_0)^3$ vem:

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\dfrac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^3}=d+\frac{\text{erro}_3(x)}{(x-x_0)^3} \tag{3.28}$$

Tomando o limite quando x tende a x_0 em (3.28) e usando (3.27), obtemos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\dfrac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^3}=d \tag{3.29}$$

Usando L'Hôpital no lado esquerdo de (3.29) obtemos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{3(x-x_0)^2}=d \tag{3.30}$$

Note que, para esse limite existir, f" deve existir em vizinhança de x_0 e ser contínua em x_0. Mais, f é 3 vezes diferenciável em x_0, pois usando L'Hôpital novamente, temos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{3!(x-x_0)}=d \tag{3.31}$$

Assim,

$$d=\frac{f''(x_0)}{3!}. \tag{3.32}$$

Substituindo em (3.25) e (3.26), temos que:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\text{erro}_3(x) \tag{3.33}$$

$$P_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \tag{3.34}$$

O que fizemos acima pode ser generalizado como:

Teorema 3.2.1. *(Fórmula de Taylor) Se f é n vezes diferenciável em x_0 então o polinômio*

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.35}$$

satisfaz:

$$f(x)=P_n(x)+erro_n(x)$$
$$erro_n(x_0)=0$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{erro_n(x)}{(x-x_0)^k}=0,0\le k\le n$$

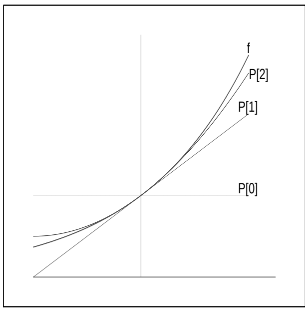
O polinômio P_n é chamado de polinômio de Taylor de grau n em torno de x_0; é usual chamar erro_n de resto de ordem n e denotá-lo por R_n.

Exemplo 3.2.1. Obtenha o polinômio de Taylor em torno de $x = 0$ de grau n de $f(x) = e^x$.

Solução . $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Assim, o polinômio pedido é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Veja na figura abaixo o gráfico da exponencial e dos seus polinômios de Taylor em torno de $x = 0$ de grau $0, 1$ e 2:



Uma outra maneira de deduzir o polinômio de Taylor de uma função de classe C^n e $(n+1)$ vezes diferenciável em torno de x_0 é (feita abaixo para $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \quad \text{(pelo Teorema Fundamental do Cálculo)}\\
&= f(0) + \int_0^x f'(x-s)\,ds \quad \text{(fazendo } t = x - s\text{)}\\
&= f(0) + f'(0)x + \int_0^x f'(x-s)s\,ds \quad \text{(integrando por partes)}\\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + \int_0^x f''(x-s)\frac{s^2}{2}\,ds \quad \text{(integrando por partes)}\\
&= \dots\\
&= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x f^{(n+1)}(x-s)\frac{s^n}{n!}\,ds
\end{aligned}$$

Existem várias maneiras de estimar o resto. Uma delas é:

Teorema 3.2.2. *(Resto de Lagrange) Se f é de classe C^n em vizinhança de x_0 e possui $n+1$ derivadas em x_0, então existe a, entre x e x_0 tal que:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemplo 3.2.2. Obtenha o polinômio de Taylor em torno de $x = 0$ de grau 4 de $f(x) = \text{sen}(x)$ e estime o resto para $|\,x\,| \le \dfrac{\pi}{4}$.

***S**olução* . O polinômio pedido é

$$P_4(x) = \operatorname{sen}(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(0) - \frac{x^3}{3!}\cos(0) + \frac{x^4}{4!}\operatorname{sen}(0) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Além disso,

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(a)x^5}{5!} = \frac{\cos(a)x^5}{5!}$$

para algum $a \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ Como $|\cos(x)| \leq 1$ e $|x| \leq \frac{\pi}{4}$, $|\, R_4(x)\,| \leq \frac{\pi^5}{5!4^5}$

Aplicação 3.2.1. *(Fórmula de Taylor e Máximos e mínimos)*

1. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local; se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local.*

2. *Se $f'(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e*

   (a) n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local;

   (b) n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local;

   (c) n é ímpar, então f não possui máximo nem mínimo em x_0.

Demonstração 3.2.1. Sem perda de generalidade, $f(x_0) = 0$. Note que então f possui máximo (mínimo) em x_0 se for negativa (positiva) em vizinhança de x_0. Além disso, caso f troque de sinal em x_0, este ponto não é nem de máximo nem de mínimo.

O polinômio de Taylor de grau n de f em torno de x_0 é $P_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Mas $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, *i.e.*, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, isto é

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Logo, para x próximo de x_0, $\frac{f(x)}{(x - x_0)^n}$ e $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ tem o mesmo sinal.

Primeiro caso: n é par.

Neste caso, $(x - x_0)^n$ é positivo e logo, $f(x)$ tem o mesmo sinal que $f^{(n)}(x_0)$, o que conclui a demonstração de (2a), (2b) (lembre que $f(x_0) = 0$) e (1) (no caso em que $n = 2$).

Segundo caso: n é ímpar.

Neste caso, $\frac{f(x)}{(x - x_0)^n}$ tem o mesmo sinal para x próximo de x_0. ConseqÃ$\frac{1}{4}$entemente, f troca de sinal em uma vizinhança de x_0, o que conclui a demonstração de (2c).

3.3 Aproximações de grau 2 para funções reais de várias variáveis

Já sabemos que a melhor aproximação de grau 1 de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciável, numa vizinhança de X^0 é dada por $L(x) = f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0)$. O erro desta aproximação é dado por:

$$\mathrm{erro}_1(X) = f(X) - L(X) = f(X) - f(X^0) - f'(X^0)(X - X^0)$$

Note que $\mathrm{erro}_1(X^0) = 0$, $\lim\limits_{X \to X^0} \mathrm{erro}_1(X) = 0$ e $\lim\limits_{X \to X^0} \dfrac{\mathrm{erro}_1(x)}{X - X^0} = f'(x_0)$.
Agora vamos obter o polinômio de grau 2,

$$\begin{aligned}
P_2(X) &= a + B(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0) \\
&= a + \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} (X - X^0) + (X - X^0)^t \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} (X - X^0) \\
&= a + \sum_{i=1}^{n} b_i (X - X^0)_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} (X - X^0)_i (X - X^0)_j
\end{aligned} \tag{3.36}$$

que melhor aproxima f, numa vizinhança de X^0. Assim, queremos obter constantes a, B e C (B e C são matrizes) tais que $P_2(X) \simeq f(X)$, onde $\simeq$ lê-se como *aproximadamente igual.* De fato, queremos que a aproximação (3.36) seja tão mais verdadeira quanto mais próximo X estiver de X^0. Reescrevemos o problema como sendo: obtenha a, B e C tal que

$$f(X) = a + B(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0) + \mathrm{erro}_2(X) \tag{3.37}$$
$$\lim_{X \to X^0} \mathrm{erro}_2(X) = 0 \tag{3.38}$$

é bastante razoável impormos que essa aproximação seja exata em X^0 e assim queremos também que:

$$\mathrm{erro}_2(X^0) = 0 \tag{3.39}$$

Substituindo (3.39) em (3.37) temos que $f(X^0) = a$ e portanto:

$$f(X) - f(X^0) - B(X - X^0) = (X - X^0)^t C(X - X^0) + \mathrm{erro}_2(X) \tag{3.40}$$

é evidente que, quando X tende a X^0, o lado direito de (3.40) tende a zero. Isto implica que, se a nossa aproximação tem alguma chance de existir, f deve ser contínua em X^0. Além disso, se $B(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0)$ tender a zero mais rápido que $\mathrm{erro}_2(X)$, teremos que, em vizinhança de X^0, $f(X) - f(X^0)$ será aproximada por $\mathrm{erro}_2(X)$ e não por $B(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0)$, como gostaríamos. Por esta razão , acrescentamos Ã nossa formulação do problema a exigência de que $\mathrm{erro}_2(X)$ deve tender a zero mais rápido que $B(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0)$. Uma maneira de exigir isso é impor que:

$$\lim_{X \to X^0} \frac{\mathrm{erro}_2(X)}{\|X - X^0\|} = 0 \tag{3.41}$$

Dividindo os dois lados de (3.40) por $\|X - X^0\|$ vem:

$$\frac{f(X) - f(X^0) - B(X - X^0)}{\|X - X^0\|} = \frac{(X - X^0)^t C(X - X^0)}{\|X - X^0\|} + \frac{\text{erro}_2(X)}{\|X - X^0\|} \tag{3.42}$$

Tomando o limite quando X tende a X^0 em (3.42), obtemos:

$$\lim_{X \to X^0} \frac{f(X) - f(X^0) - B(X - X^0)}{\|X - X^0\|} = 0 \tag{3.43}$$

Observe que então estamos exigindo que f seja derivável em X^0 e que

$$f'(X^0) = B \tag{3.44}$$

Substituindo em (3.40) e (3.36), temos que:

$$f(X) - f(X^0) - f'(X^0)(X - X^0) - (X - X^0)^t C(X - X^0) = \text{erro}_2(X) \tag{3.45}$$

$$P_2(X) = f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + (X - X^0)^t C(X - X^0) \tag{3.46}$$

Note que então $P_2(X) = P_1(X) + (X - X^0)^t C(X - X^0)$, onde $P_1(X)$ é a melhor aproximação de grau 1 de f. Em outras palavras, P_2 é uma aproximação de f pelo menos tão boa como a aproximação de grau 1. De novo, caso $(X - X^0)^t C(X - X^0)$ tender a zero mais rápido que $\text{erro}_2(X)$, teremos que, em vizinhança de X^0, $f(X) - f(X^0) - f'(X^0)(X - X^0)$ será aproximada por $\text{erro}_2(X)$ e não por $(X - X^0)^t C(X - X^0)$, como gostaríamos. Por isso, acrescentamos Ã nossa formulação do problema a exigência de que $\text{erro}_2(X)$ deve tender a zero mais rápido que $(X - X^0)^t C(X - X^0)$. Uma maneira de exigir isso é impor que:

$$\lim_{X \to X^0} \frac{\text{erro}_2(X)}{\|X - X^0\|^2} = 0 \tag{3.47}$$

Dividindo os dois lados de (3.45) por $\|X - X^0\|^2$ vem:

$$\frac{f(X) - f(X^0) - f'(X^0)(X - X^0) - (X - X^0)^t C(X - X^0)}{\|X - X^0\|^2} = \frac{\text{erro}_2(X)}{\|X - X^0\|^2} \tag{3.48}$$

Tomando o limite quando X tende a X^0 em (3.48) e usando (3.39), obtemos:

$$\lim_{X \to X^0} \frac{f(X) - f(X^0) - f'(X^0)(X - X^0) - (X - X^0)^t C(X - X^0)}{\|X - X^0\|^2} = 0 \tag{3.49}$$

Para que esse limite exista, f' deve ser contínua em X^0. Note também que, caso o numerador seja derivável e A simétrica, sua derivada é

$$f'(X) - f'(X^0) - \text{Id}\ A(X - X^0) - (X - X^0)^t A\text{Id} = f'(X) - f'(X^0) - 2A(X - X^0) \tag{3.50}$$

Por outro lado, a derivada do denominador é

$$2(X - X^0) \tag{3.51}$$

Mais ainda, "usando L'Hôpital no lado esquerdo de (3.49)"e os resultados (3.50) e (51), obtemos:

$$\lim_{X\to X^0} \frac{\|f'(X) - f'(X^0) - 2A(X - X^0)\|}{\|2(X - X^0)\|} = 0 \tag{3.52}$$

Observe que então estamos exigindo que f seja duas vezes derivável em X^0 e que:

$$f''(X^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(X^0) & \dots & f_{x_1x_n}(X^0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(X^0) & \dots & f_{x_nx_n}(X^0) \end{pmatrix} = 2C \tag{3.53}$$

Substituindo em (3.45) e (3.46), temos que:

$$f(X) = f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t f'(X^0)(X - X^0) + \mathrm{erro}_2(X) \tag{3.54}$$

$$P_2(X) = f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t f'(X^0)(X - X^0) \tag{3.55}$$

A equação (3.55) pode ser reescrita como:

$$P_2(X) = f(X^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^0)(X_i - X_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}(X^0)(X_i - X_i^0)(X_j - X_j^0) \tag{3.56}$$

A matrix $f'(X^0)$ é chamada de Hessiana de f em X^0 e usualmente denotada por $H_f(X^0)$. Lembre que se f é de classe C^2, então $H_f(X^0)$ é simétrica, *i.e.*, $\dfrac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \dfrac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i}(X)$.

Teorema 3.3.1. *(Fórmula de Taylor) Se f é de classe C^2 em uma vizinhança de X^0 então o polinômio*

$$P_2(X) = f(X^0) + f'(X_0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H_f(X^0)(X - X^0) \tag{3.57}$$

satisfaz:

$$f(X) = P_2(X) + erro_2(X)$$
$$erro_2(X^0) = 0$$
$$\lim_{X\to X^0} \frac{erro_2(X)}{\|X - X^0\|^k} = 0, 0 \le k \le 2$$

Demonstração 3.3.1. (clássica) Vamos fixar Y e definir a função

$$\begin{aligned} g : [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(X^0 + tY) \end{aligned} \tag{3.58}$$

Assim,

$$f(X^0 + Y) - f(X^0) = g(1) - g(0). \tag{3.59}$$

Mas g é de classe C^1, logo $g(s) = g(0) + sg'(0) + R_1$ e portanto, usando a fórmula do resto de Lagrange,

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g'(c)}{2}, \text{ para algum } c \in (0,1). \tag{3.60}$$

Substituindo em (3.3.1), temos que,

$$f(X^0 + Y) - f(X^0) = g'(0) + \frac{g'(c)}{2}, \text{ para algum } c \in (0,1). \tag{3.61}$$

Por outro lado, $g'(t) = f'(X^0 + tY)\,Y$ e assim,

$$g'(0) = f'(X^0)\,Y. \tag{3.62}$$

Além disso, $g'(t) = Y^t H(X^0 + tY)\,Y$ e portanto,

$$g'(c) = Y^t H(X^0 + cY)\,Y. \tag{3.63}$$

Substituindo (3.62) e (3.63) em (3.61), temos que, $f(X^0+Y) - f(X^0) = f'(X^0)\,Y + \frac{1}{2}Y^t H(X^0 + cY)\,Y$, *i.e.*,

$$f(X^0 + Y) = f(X^0) + f'(X^0)\,Y + \frac{1}{2}Y^t H(X^0 + cY)\,Y. \tag{3.64}$$

Note que fazendo $X = X^0 + Y$, temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H(X^0 + cY)(X - X^0) \\ &= f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H(X^0)(X - X^0) + R_2, \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\text{onde } R_2 = \frac{1}{2}Y^t H(X^0 + cY)\,Y - \frac{1}{2}Y^t H(X^0)\,Y. \tag{3.66}$$

Assim,

$$f(X) = P_2(X) + R_2 \tag{3.67}$$

e queremos mostrar que $\lim\limits_{Y \to 0} \dfrac{R_2}{\|Y\|^2} = 0$. Mas

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0 + cY) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0)\right] y_i y_j). \tag{3.68}$$

Agora note que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0 + cY) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0)\right] y_i y_j\right) \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0 + cY) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0)\right] \|Y\|^2 \tag{3.69}$$

Substituindo em (3.68), vem:

$$\frac{R_2}{\|Y\|^2} \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0 + cY) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X^0)\right]\right) \tag{3.70}$$

Usando que f é de classe C^2, temos então que

$$\lim_{Y\to 0}\frac{R_2}{\|Y\|^2}=0.$$

Exemplo 3.3.1. Obtenha o polinômio de Taylor de grau 2 em torno dos pontos $(x,y)=(0,0)$ e $(x,y)=(0,1)$ de $f(x,y)=3(x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$.

***S**olução* . As derivadas parciais de f são :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=6xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-3y^2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=6ye^{-x^2-y^2}(3-x^2-3y^2)\end{aligned}$$

Portanto, $f'(0,0)=f'(0,1)=(0,0)$ Além disso, as derivadas parciais de segunda ordem de f são

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y)&=6e^{-x^2-y^2}(1-5x^2-3y^2+2x^4+6x^2y^2)\\ \frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}(x,y)&=12xye^{-x^2-y^2}(-4+x^2+3y^2)=\frac{\partial f^2}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y)&=6e^{-x^2-y^2}(3-15y^2-x^2+2x^2y^2+6y^4)\end{aligned}$$

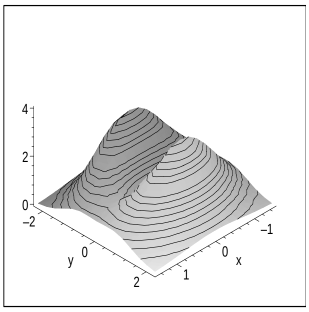
Portanto,

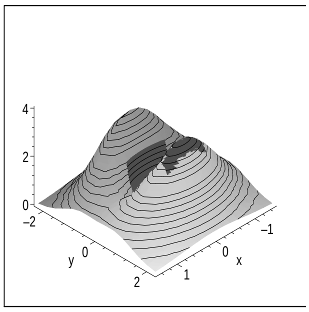
$$H_f(0,0)=6\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\text{ e } H_f(0,1)=6e^{-1}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-6\end{pmatrix}$$

Assim, os polinômios pedidos são :

$$\begin{aligned}P_{2,(0,0)}(x,y)&=f(0,0)+f'(0,0)X+\frac{1}{2}X^tH_f(0,0)X=3(x^2+3y^2)\\ P_{2,(0,1)}(x,y)&=f(0,1)+f'(0,1)X+\frac{1}{2}X^tH_f(0,1)X=3e^{-1}(-2x^2-6y^2+12y-3)\end{aligned}$$

Veja a seguir, os gráficos de f, e ao lado, das curvas de nível de f e dos dois polinômios





3.4 Máximos e Mínimos

Lembre que uma superfície definida explicitamente por uma equação da forma $z = f(x, y)$ pode ser considerada com uma superfície de nível do campo vetorial F dado por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Se f é diferenciável, o gradiente de F é dado por $\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = (\nabla f, -1)$. Quando $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, o ponto $P = (x_0, y_0)$ é chamado de ponto crítico ou estacionário de f. Genericamente, os pontos críticos se classificam em três tipos: máximos, mínimos e selas. Esses conceitos também valem para funções em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.4.1. Dado $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dizemos que $P \in D$ é um *ponto de máximo absoluto* de f se $f(X) \leq f(P)$ para todo $X \in D$. P é um *ponto de máximo local* se existe $r > 0$ tal que $f(X) \leq f(P)$ para todo $X \in D \cap B_r(P)$ ($B_r(P)$ é a bola centrada em P e de raio r). Da mesma forma, dizemos que $P \in D$ é um *ponto de mínimo absoluto* de f se $f(X) \geq f(P)$ para todo $X \in D$ e P é um *ponto de mínimo local* se existe $r > 0$ tal que $f(X) \geq f(P)$ para todo $X \in D \cap B_r(P)$. Finalmente, que $P \in D$ é um *ponto de sela* de f se para todo $B_r(P)$, existem unitários u_1 e $u_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(P + tu_1) \leq f(P) \leq f(P + su_2)$, para $P + tu_1, P + su_2 \in D \cap B_r(P)$.

Exemplo 3.4.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Note que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo global, já que $f(0, 0) = 1$ e $f(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.4.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Note que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global, já que $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.4.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Note que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela, já que $f(0, t) = -t^2 < 0$ para $t \neq 0$ e $f(s, 0) = s^2 > 0$, para $s \neq 0$.

Teorema 3.4.1. *Se P é um ponto de máximo (ou mínimo) local de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e f é diferenciável em P, então $\nabla f(P) = 0$.*

Demonstração 3.4.1. Suponha que $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é ponto de máximo (ou mínimo) local e considere a função real f_k dada por $f_k(x_k) = f(p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, p_{k+1}, p_n)$. É claro que p_k é ponto de máximo (ou mínimo) local de f_k e portanto, ${f_k}'(p_k) = 0$ *i.e.*, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P) = 0$. Assim, $\nabla f(P) = 0$.

Definição 3.4.2. Dado $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em P, dizemos que P é um *ponto crítico* ou *estacionário* de f se $\nabla f(P) = 0$.

Exemplo 3.4.4. (exemplos 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 revisitados) Determine os pontos críticos das funções dos exemplos 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3.

Solução . $f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, logo $\nabla f_1(x, y) = (-2x, -2y)$ e portanto P é crítico se e só se $P = (0, 0)$.
$f_2(x, y) = x^2 + y^2$, logo $\nabla f_2(x, y) = (2x, 2y)$ e portanto P é crítico se e só se $P = (0, 0)$.
$f_3(x, y) = x^2 - y^2$, logo $\nabla f_3(x, y) = (2x, -2y)$ e portanto P é crítico se e só se $P = (0, 0)$.

Teorema 3.4.2. *Seja A uma matriz n x n simétrica e $Q(X)$ a forma quadrática dada por*

$$Q(X) = X^t AX = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right).$$

Então $Q(X) > 0$ para todo $X \neq 0$ (e dizemos que Q é positiva definida) se todos os autovalores de A são positivos e $Q(X) < 0$ para todo $X \neq 0$ (e dizemos que Q é negativa definida) se todos os autovalores de A são negativos.

Demonstração 3.4.2. O teorema espectral diz que existe uma matriz ortogonal S tal que $S^t AS = \Lambda$ é diagonal (Λ é a matriz dos autovalores de A). Portanto, fazendo $X = SY$, temos que,

$$Q(X) = X^t AX = (SY)^t ASY = Y^t S^t ASY = Y^t \Lambda Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Lembre também que como A é simétrica, os seus autovalores são reais. Agora, caso todos os autovalores sejam positivos, temos que $Q(X) > 0$ se $Y \neq 0$, *i.e.*, $X \neq 0$. Da mesma forma, caso todos os autovalores sejam negativos, temos que $Q(X) < 0$ se $Y \neq 0$, *i.e.*, $X \neq 0$.

Teorema 3.4.3. *Seja $f : B_r(X^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H(X^0)$ a matriz Hessiana de f em X^0 ponto crítico de f. Então :*

1. *Se todos os autovalores de $H(X^0)$ são positivos, X^0 é ponto de mínimo local de f.*
2. *Se todos os autovalores de $H(X^0)$ são negativos, X^0 é ponto de máximo local de f.*
3. *Se $H(X^0)$ possui autovalores positivos e negativos, X^0 é ponto de sela de f.*

Demonstração 3.4.3. Seja $Q(Y) = Y^t H(X^0)Y$. A fórmula de Taylor diz que

$$\begin{aligned}
P_2(X) &= f(X^0) + f'(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H(X^0)(X - X^0) \\
&= f(X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H(X^0)(X - X^0) \\
f(X) &= P_2(X) + R_2(X) \\
&= f(X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)^t H(X^0)(X - X^0) + R_2(X)
\end{aligned}$$

onde o resto R_2 satisfaz: $\displaystyle\lim_{X \longrightarrow X^0} \frac{R_2(X)}{\|X - X^0\|^2} = 0$. Fazendo $Y = X - X^0$, temos que,

$$\begin{aligned}
f(X^0 + Y) - f(X^0) &= \frac{1}{2} Y^t H(X^0)Y + R_2(Y + X^0) \\
&= \frac{1}{2} Q(Y) + R_2(Y + X^0)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe um número positivo r tal que para $0 < \|Y\| < r$, o sinal de $f(Y + X^0) - f(X^0)$ é o mesmo de $Q(Y)$.

Primeiro caso: os autovalores de $H(X^0)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são todos positivos:

Seja h o menor autovalor e $u < h$. Então $d_1 = \lambda_1 - u, d_2 = \lambda_2 - u, \dots, d_n = \lambda_n - u$ também são positivos. Mas $d_1, d_2, \dots, d_n$, são os autovalores da matriz $H(X^0) - uId$, portanto a forma quadrática $Y^t(H(X^0) - uId)Y$ é positiva definida e assim, $Y^t(H(X^0) - uId)Y > 0$, *i.e.*,

$$Y^tH(X^0)Y > Y^t uI\,dy = u\|Y\|^2, \text{para todo } u < h.$$

Em particular, para $u = \dfrac{h}{2}$, temos que $Y^tH(X^0)Y > \dfrac{h\|Y\|^2}{2}$, *i.e.*,

$$\frac{Q(Y)}{2} > \frac{h\|Y\|^2}{4} \text{para todo } Y \neq 0.$$

Mas $\lim\limits_{Y \longrightarrow 0} \dfrac{R_2(Y + X^0)}{\|Y\|^2} = 0$, logo existe $r > 0$ tal que $\dfrac{\|R_2(Y + X^0)\|}{\|Y\|^2} < \dfrac{h}{4}$ para $0 < \|Y\| < r$.
Para esses Y temos:

$$0 \leq \|R_2(Y + X^0)\| < \frac{h\|Y\|^2}{4} < \frac{Q(Y)}{2}$$

Lembre que se a e b são reais, $a - |b| \leq a + b$, logo

$$0 < \frac{Q(Y)}{2} - \|R_2(Y + X^0)\| \leq \frac{Q(Y)}{2} + R_2(Y + X^0) = f(Y + X^0) - f(X^0)$$

Segundo caso: os autovalores de $H(X^0)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são todos negativos:

Essa demonstração é essencialmente igual Ã do primeiro caso.

Terceiro caso: $H(X^0)$ possui autovalores positivos e negativos:

Sejam $0 < \lambda_1$ e $\lambda_2 < 0$ dois autovalores de $H(X^0)$ e $h = min\{\lambda_1, -\lambda_2\}$. Então para todo real u tal que $-h < u < h$, $\lambda_1 - u$ e $\lambda_2 - u$, são autovalores com sinais opostos de $H(X^0) - uId$. Portanto, para $u \in (-h, h)$, a forma quadrática $Y^t(H(X^0) - uId)Y$ assume valores positivos e negativos em torno de $Y = 0$. Como antes, escolha $r > 0$ tal que $\dfrac{R_2(Y + X^0)}{\|Y\|} < \dfrac{h}{2}$ se $0 < \|Y\| < r$ e, de novo, o sinal de $f(Y + X^0) - f(X^0)$ é o mesmo de $Q(Y)$. Como para Y tendendo a zero, $Q(Y)$ assume valores positivos e negativos, X^0 é um ponto de sela.

Exemplo 3.4.5. (exemplo 3.4.4 revisitado) Classifique os pontos críticos das funções do exemplo 3.4.4, usando o teorema acima.

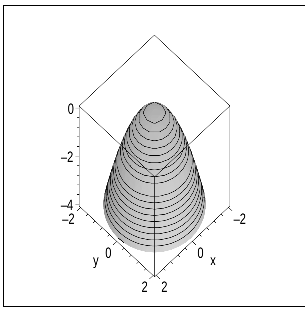
***S**olução* . $f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $\nabla f_1(x, y) = (-2x, -2y)$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2$, $\nabla f_2(x, y) = (2x, 2y)$, $f_3(x, y) = x^2 - y^2$, $\nabla f_3(x, y) = (2x, -2y)$. Nos três casos, o único ponto crítico é $P = (0, 0)$.

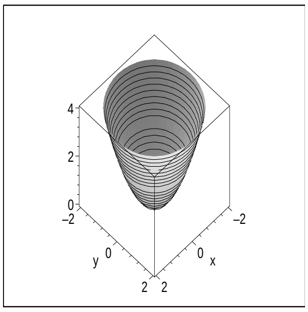
Além disso,

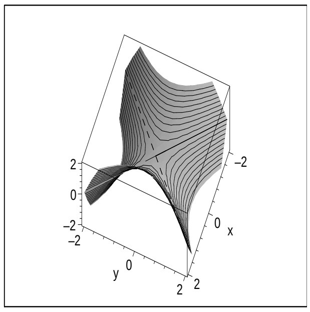
$$H_{f_1}(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Assim, P é ponto de máximo local de f_1, mínimo local de f_2 e ponto de sela de f_3.

Veja os gráficos dessas funções :







Exemplo 3.4.6. (exemplo 3.3.1 revisitado) Obtenha e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = 3(x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$.

***S**olução* . $\nabla f(x,y) = 6e^{-x^2-y^2}(x(1-x^2-3y^2), y(3-x^2-3y^2))$

$$H_f(x,y) = 6e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 1-5x^2-3y^2+2x^4+6x^2y^2 & 2xy(-4+x^2+3y^2) \\ 2xy(-4+x^2+3y^2) & 3-15y^2-x^2+2x^2y^2+6y^4 \end{pmatrix}$$

Assim, $\nabla f(x,y) = 0$ se e só se $(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1), (1,0)$ ou $(-1,0)$, o que mostra que $(0,0)$ e $(0,1)$ são pontos críticos de $f(x,y) = 3(x^2+3y^2)e^{(-x^2-y^2)}$. Além disso,

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ H_f(0,1) &= 6e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = H_f(0,-1) \\ H_f(1,0) &= 6e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H_f(-1,0) \end{aligned} \tag{3.71}$$

logo, $(0,0)$ é ponto de mínimo local, $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de máximo local e $(1,0)$ e $(-1,0)$ são pontos de sela.

Observação Lembre que o determinante de uma matriz é o produto dos seus autovalores e que o traço (soma dos elementos na diagonal principal) é a soma dos mesmos. Assim, uma matriz simétrica 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

possui ambos os autovalores positivos se $\det(A) > 0$ e $a+c > 0$;
possui ambos os autovalores negativos se $\det(A) > 0$ e $a+c < 0$;
possui autovalores com sinais contrários se $\det(A) < 0$;

Exemplo 3.4.7. Obtenha e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^2 - 3x + xy + y^2$.

***S**olução* . $\nabla f(x,y) = (2x-3+y, x+2y)$. Portanto o único ponto crítico de f é $P = (2,-1)$. Além disso, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e logo, $\det(H_f) = 3$ e $\mathrm{tr}(H_f) = 4$, logo P é ponto de mínimo.

Exemplo 3.4.8. Obtenha e classifique os pontos críticos de $f_1(x,y) = -x^4 - y^2$, $f_2(x,y) = x^4 + y^2$, $f_3(x,y) = x^4 - y^2$.

Solução . $\nabla f_1(x,y) = (-4x^3, -2y), \nabla f_2(x,y) = (4x^3, 2y)$ e $\nabla f_3(x,y) = (4x^3, -4y^2)$. Portanto as três funções possuem apenas um ponto crítico, $P = (0,0)$. é claro que P é ponto de máximo global de f_1, de é mínimo global de f_2 e de sela de f_3, mas veja as Hessianas:

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esse exemplo ilustra o fato de que quando o determinante da Hessiana é nulo *i.e.*,a Hessiana possui um autovalor nulo, nada podemos afirmar a respeito do tipo de singularidade que a função tem.

Exemplo 3.4.9. Classifique os pontos críticos de $f(x,y,z) = x^3 - 3x^2 - 2y^2 - z^2$.

Solução . $\nabla f(x,y,z) = (3x^2 - 6x, -4y, -2z)$. Assim, os pontos críticos de f são $P = (2,0,0)$ e $Q = (0,0,0)$. Além disso, $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, logo, $H_f(Q) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $H_f(P) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Assim, $(0,0,0)$ é ponto de máximo e $(2,0,0)$ de sela.

Observação : Lembre que para obter os sinais dos autovalores de uma matriz simétrica nxn não é necessário diagonalizá-la. Basta colocar a forma quadrática correspondente em forma canônica.

Exercício 3.4.1. Obtenha e classifique os pontos críticos das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y$
(b) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
(c) $f(x,y) = x + y\,\mathrm{sen}(x)$
(d) $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$
(e) $f(x,y) = x^2 + \mathrm{sen}(x)$
(f) $f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$

3.5 Máximos e mínimos condicionados - Multiplicadores de Lagrange

Exemplo 3.5.1. Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x^2 + y^2$. Obtenha os pontos mais próximos da origem da superfície de nível 1 definida por F.

Solução . O que queremos é determinar o(s) mínimo(s) de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sujeito Ã condição $x^2 + y^2 = 1$. Intuitivamente, é claro que isso é equivalente a obter (x,y,z) onde z é o mínimo da função real $\sqrt{z}$ e $x^2 + y^2 = 1$. Assim, os pontos de mínimo são da forma $(x,y,0)$, com $x^2 + y^2 = 1$.

O problema de determinar extremos condicionados é bastante difícil, mas em alguns casos (por exemplo, quando o conjunto que queremos restringir tem uma estrutura simples (*e.g.,* é uma superfície) existem alguns métodos para obter a solução . Um desses métodos é o de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 3.5.1. *(Multiplicadores de Lagrange) Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável possui um ponto extremo em P quando está sujeito Ã $m < n$ condições , $g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0$, com g_k diferenciáveis, então existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (chamados de multiplicadores de Lagrange) tais que*

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P)$$

Exemplo 3.5.2. (exemplo 3.5.1 revisitado) Refaça o exemplo 3.5.1 usando multiplicadores de Lagrange.

Solução *.* Fazendo $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1$, o que queremos é determinar o(s) mínimo(s) de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeito Ã condição $g = 0$. Queremos então obter P tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, *i.e.*, queremos $P = (x, y, z)$ satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\lambda(x, y, 0) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

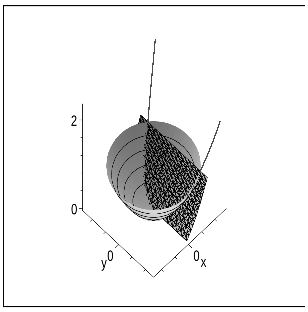
Portanto,

$$\begin{cases} z = 0 \\ x(2\lambda\sqrt{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ y(2\lambda\sqrt{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{logo,} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x(2\lambda - 1) = 0 \\ y(2\lambda - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

isto é, $z = 0, \lambda = 1/2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Logo os mínimos são da forma $\{(x, y, 0); x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplo 3.5.3. Se $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2$, representa a temperatura em (x, y, z), determine a temperatura máxima e a mínima na curva Γ obtida pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = z$ e $z = x^2 - x$.

Solução *.* Veja na figura abaixo, a curva Γ e as superfícies S_1 e S_2 dadas respectivamente por $x^2 + y^2 = z$ e $z = x^2 + 2x$.



Sejam $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ e $g_2(x, y, z) = x^2 - x - z$. Usando multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2, i.e., (2x, -2y, 0) = \lambda_1(2x, 2y, -1) + \lambda_2(2x - 1, 0, -1)$$

Portanto, $2x(1-\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_2 = 2y(-1-\lambda_1) = \lambda_1+\lambda_2 = 0$; logo:

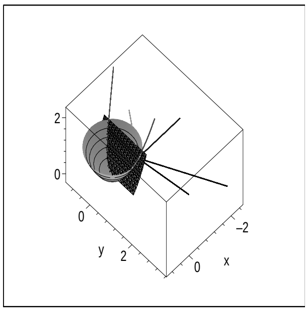
$$\{\lambda_1+\lambda_2=0, \lambda_2=-2x \text{ e } \lambda_1=-1\} \text{ ou } \{\lambda_1+\lambda_2=0, \lambda_2=-2x \text{ e } y=0\} \; i.e.,$$
$$\{\lambda_1=-1, \lambda_2=1, x=-\frac{1}{2}\} \text{ ou } \{\lambda_1+\lambda_2=0, \lambda_2=-2x \text{ e } y=0\}$$

Além disso, $x^2+y^2=z$ e $z=x^2-x$. Assim,

$$\{x=-\frac{1}{2}, y=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, z=\frac{3}{4}\} \text{ ou } \{y=0, z=x^2=x^2-x\}$$

Portanto $P_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{4}\right)$, $P_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{3}{4}\right)$ e $P_3=(0,0,0)$ são os extremos de f. Como $f(P_1)=f(P_2)=-\frac{1}{4}$ e $f(P_3)=0$, P_1 e P_2 são pontos de mínimo e P_3 de máximo.

Observe que a equação $\nabla f(P)=\lambda_1\nabla g_1(P)+\lambda_2\nabla g_2(P)$ obriga que $\nabla f(P)$ pertença ao plano gerado por $\nabla g_1(P)$ e $\nabla g_2(P)$. Seja T o vetor tangente Ã Γ em P. Então T pertence ao plano tangente em P Ã superfície S_1 e também ao plano tangente em P Ã S_2. Lembre que esses planos são dados por $\nabla g_1(P)\bullet(x,y,z)=0$ e $\nabla g_2(P)\bullet(x,y,z)=0$. Assim, T é normal Ã $\nabla g_1(P)$ e Ã $\nabla g_2(P)$. ConseqÃ$\frac{1}{4}$entemente, $f(P)$ também é normal a T, *i.e.*, $f(P)$ é normal Ã Γ em P. Veja a figura:



Exemplo 3.5.4. Determine os pontos extremos de $f(x,y,z)=x-2y+2z$ na esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Solução . $\nabla f(x,y,z)=(1,-2,2)$. Seja $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. Então $\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ e queremos obter $P=(x,y,z)$ tal que:

$$(1,-2,2)=\lambda(2x,2y,2z)$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$

Assim,

$$2\lambda x=1, 2\lambda y=-2, 2\lambda z=2 \text{ e } x^2+y^2+z^2=1$$

Logo, $z=2x=-y=\frac{1}{\lambda}$ e $x^2+y^2+z^2=1$, *i.e.*, $P=x(2,-1,1)$ e $x^2+y^2+z^2=1$. Portanto $P=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$.

Observação : O teorema sobre multiplicadores de Lagrange, apenas garante que se P for um ponto extremo, então $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P)$. Assim, o fato de P satisfazer a hipótese do teorema não garante que P é um ponto extremo; entretanto vale:

Teorema 3.5.2. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e A é um conjunto fechado e limitado, então f possui ponto de máximo global e de mínimo global.*

Exemplo 3.5.5. Determine os pontos críticos e extremos de $f(x,y) = x^2+2y^2$ sujeito Ã condição $x^2 + x + y^2 \leq 1$.

Solução . Queremos estudar a função f na região $R = \{(x,y); x^2+x+y^2 \leq 1\}$. Primeiro vamos estudar os pontos críticos interiores Ã R: $\nabla f(x,y) = (2x, 4y)$ e portanto, o único ponto crítico no interior de R é $(0,0)$. Como $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $(0,0)$ é ponto de mínimo local.
Para estudar o bordo de R, usaremos multiplicadores de Lagrange:
Seja $g(x,y) = x^2 + x + y^2 - 1$. Como $\nabla g(x,y) = (2x+1, 2y)$, queremos (x,y) tal que $(2x, 4y) = \lambda(2x+1, 2y)$ e $x^2 + x + y^2 = 1$ Assim, $2x(1-\lambda) = \lambda, 2y(2-\lambda) = 0$ e $x^2 + x + y^2 = 1$. Portanto, $\{\lambda = 2, x = -1$ e $x^2 + x + y^2 = 1\}$ ou $\{y = 0, 2x(1-\lambda) = \lambda$ e $x^2 + x + y^2 = 1\}$. Logo, $\{\lambda = 2, x = -1, y^2 = 1\}$ ou $\{y = 0, 2x(1-\lambda) = \lambda$ e $x^2 + x - 1 = 0\}$. Assim, os candidatos a pontos extremos no bordo de R são $P_1 = (-1,1), P_2 = (-1,-1), P_3 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $P_4 = \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Como $f(P_1) = f(P_2) = 3, f(P_3) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, f(P_4) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $f(0,0) = 0$, $(0,0)$ é ponto de mínimo global e P_1 e P_2 são pontos de máximo globais.

Exercício 3.5.1. Obtenha e classifique os pontos críticos das funções abaixo:

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y$, sujeito a $x + y \leq 2$
2. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$, sujeito a $x - y \leq 2$
3. $f(x,y) = x + y\,\mathrm{sen}(x)$, sujeito a $x + y \leq 2\pi$
4. $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$, sujeito a $x + y \leq 2$ e $x^2 - y + z \leq 0$
5. $f(x,y) = \mathrm{sen}(x) + y$ sujeito a $x + y \leq 2\pi$
6. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito a $x^2 + y^2 \leq z$ e a $x + 2y + 2z \leq 5$.

Exercício 3.5.2. Dado f e P tal que $\nabla f(P) = 0$ e $H_f(P)$ como abaixo, classifique, se possível, o ponto crítico P.

1. $H_f(P) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $H_f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.6 Respostas aos Exercícios

Seção 5.4

1. (a) $P = (1, 2)$, sela
   (b) $P = (\frac{54}{7}, -\frac{22}{7})$, mínimo
   (c) $P = (k\pi, (-1)^{k+1}), k \in \mathbb{Z}$, sela
   (d) $P = (0, 0, 0)$, máximo
   (e) $P = (k\pi, (-1)^{k+1}), k \in \mathbb{Z}$, sela
   (f) $P = (0, 0, 0)$, máximo
   (g) $P \in \{(x, y); 2x = -\cos(x)\}$, indefinido
   (h) $P = (x, y, 0), x^2 + y^2 = 1$, mínimo global se $x = y = 0$, indefinidos caso contrário

Seção 5.5

1. (a) $P = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, máximo
   (b) $P = \left(\frac{13}{8}, \frac{-3}{8}\right)$, mínimo
   (c) $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, máximo
   (d) $P = (1, 1, 0)$, mínimo
   (e) $P = (0, 2\pi)$, máximo
   (f) $P = (-1, -2, 5)$, mínimo
2. (a) mínimo pois $\sigma(H) = \{1, 2, 5\}$
   (b) nem máximo nem mínimo pois $\sigma(H) = \left\{1, \frac{3+\sqrt{61}}{2}, \frac{3-\sqrt{61}}{2}\right\}$

Capítulo 4

Integração em várias variáveis

4.1 Integrais Iteradas

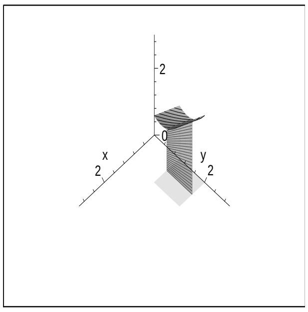
Dado $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ considere $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$. A integral $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$ é denotada por $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ ou por $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$.

Exemplo 4.1.1. Seja $f : [0,1] \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y$. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx$ e $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$.

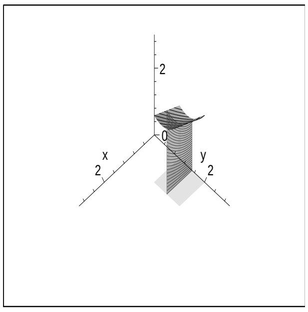
Solução .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_1^2 (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.\end{aligned}$$

Observe na figura abaixo, o gráfico de f, da região de integração $[0,1] \times [1,2]$ e note que para cada x fixo, a integral $\displaystyle\int_1^2 (x^2+y)\,dy$ é a área da região hachurada:



Assim, a integral $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y)\, dy\, dx$ é o volume da região abaixo do gráfico de f e acima do retângulo $[0,1] \times [1,2]$.
Vamos agora calcular na outra ordem de integração :
$$\int_1^2 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy\right)\Bigg]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} + y\right)\, dy = \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$$
Observe que as duas integrais tem o mesmo valor. Note também que para cada y fixo, $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + y)\, dx$ é a área da seção paralela ao plano xz. Veja a figura:



Assim, a segunda integral também representa o volume da região abaixo do gráfico de f e acima do retângulo $[0,1] \times [1,2]$.

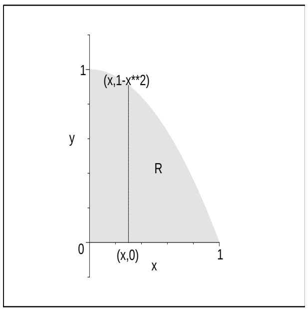
Note: quando a ordem de integração não altera o resultado, é usual escrever $\displaystyle\int_R f(x,y)\, dx\, dy$, onde R é a região de integração .

Exemplo 4.1.2. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (x^2 + y)\, dy\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} dy\, dx$.

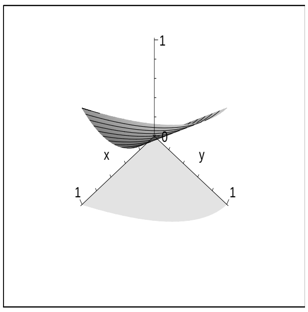
***S**olução .*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (x^2 + y)\, dy\, dx &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1 - x^4}{2}\, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

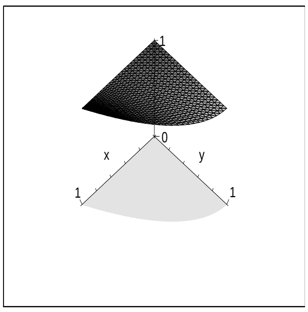
Além disso, $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} dy\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{2}{3}.$
Observe que para cada x fixo, y varia de 0 a $1-x^2$ e portanto quando x varia de 0 a 1, obtemos a região R esboçada abaixo:



De novo, a integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x^2}^1 (x^2+y)\,dy\,dx$ é o volume do sólido abaixo do gráfico de $f(x,y) = x^2 + y$ e acima da região R contida no plano $z = 0$.

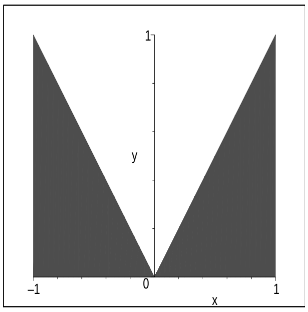


Da mesma forma, a integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} dy\,dx$ é o volume do sólido abaixo do gráfico de $f(x,y) = 1$ e acima da região R contida no plano $z = 0$, *i.e.*, é o volume da placa de espessura 1 e base R, ou seja, a área de R.



Exemplo 4.1.3. Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq |\,x\,| \leq 1\}$. Escreva as integrais iteradas.

***S**olução* . Veja abaixo o esboço de R:



As integrais são : $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{|x|} dy\,dx$ e $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-y} dx + \int_y^1 dx \right) dy.$

Exemplo 4.1.4. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_x^{2x+y} (x+2y+z)\,dz\,dy\,dx$ e esboce a região de integração R.

***S**olução .*

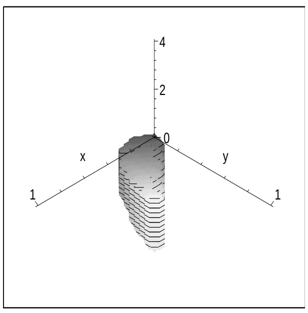
$$\int_x^{2x+y} (x+2y+z)\,dz = \left((x+2y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big]_x^{2x+y} = (x+2y)\,(x+y) + \frac{(2x+y)^2 - x^2}{2}$$
$$= x^2 + 3xy + 2y^2 + \frac{3x^2 + 4xy + y^2}{2} = \frac{5x^2 + 10xy + 5y^2}{2} = \frac{5}{2}(x+y)^2.$$

Assim,

$$\int_{x^2}^{x} \int_x^{2x+y} (x+2y+z)\,dz\,dy = \frac{5}{2} \int_{x^2}^{x} (x+y)^2\,dy = \left(\frac{5}{6}(x+y)^3 \right) \Big]_{x^2}^{x}$$
$$= \frac{5}{6} \left(2x^3 - (x+x^2)^3 \right) = \frac{5}{6}(-x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 7x^3).$$

Finalmente, $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_x^{2x+y} (x+2y+z)\,dz\,dy\,dx = \frac{5}{6} \int_0^1 (-x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 7x^3)\,dx = \frac{71}{168}$

A região de integração , $R = \{(x,y,z); 0 \le x \le 1$ e $x^2 \le y \le x \le z \le 2x+y\}$ está esboçada abaixo.



Exemplo 4.1.5. Calcule $I_n = \displaystyle\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n.$

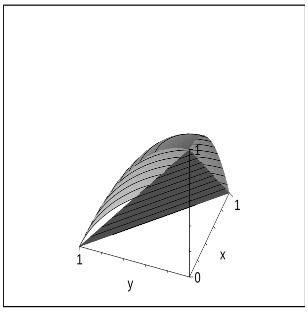
Solução . I_n é o volume em $\mathbb{R}^n$ da região $R = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_n \leq x_{n-1} \cdots \leq x_2 \leq x_1 \leq 1\}$. Além disso:
$I_1 = \int_0^1 dx_1 = 1$,
$I_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 = \int_0^1 x_1\, dx_1 = 1/2$,
$I_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2\, dx_2 = \int_0^1 \frac{{x_1}^2}{2}\, dx_1 = 1/6.$
Assim, $I_n = \dfrac{1}{n!}$.

Exemplo 4.1.6. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y = 1$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solução .

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left((1 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \Big]_0^{1-x} = \int_0^1 \left((1 - x^2)\,(1 - x) - \frac{(1 - x)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2\,x^2 + \frac{4\,x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Veja a figura:



4.2 Integrais Duplas

Definição 4.2.1. Uma partição P do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ é

$$P = \{(x_1, y_j), i = 0, 1, \ldots, n, j = 0, 1, \ldots m\}$$

e determina mn retângulos R_{ij} de área Δ_{ij}. O tamanho da partição P é

$$|P| = \text{máximo}\{\Delta_{11}, \ldots \Delta_{nm}\}.$$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D limitado, $D \subset [a,b] \times [c,d]$. Para cada par (i,j) seja X_{ij} um ponto do retângulo R_{ij}. Uma soma de Riemann para f é

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(X_{ij})\Delta_{ij}$$

(substitua $f(X_{ij})$ por zero se $X_{ij} \notin D$). Observe que se $f > 0$ então $f(X_{ij})\Delta_{ij}$ é o volume do paralelepípedo de altura $f(X_{ij})$ e base o retângulo R_{ij}. Dizemos que f é integrável em D se existe o limite

$$\lim_{|P| \to 0} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(X_{ij})\Delta_{ij} \right)$$

Finalmente, quando f é integrável em D, dizemos que a integral dupla de f sobre D é

$$\int_D f\, dA = \lim_{|P| \to 0} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(X_{ij})\Delta_{ij} \right)$$

Teorema 4.2.1. *Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado com bordo ∂D imagem de uma curva simples fechada e suave por partes e f é contínua em D então f é integrável em D.*

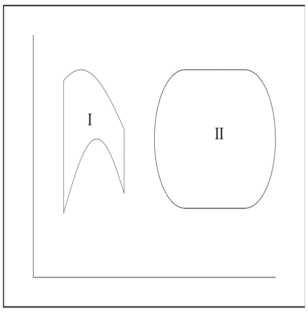
Definição 4.2.2. Uma região R do plano é de tipo 1 se R pode ser descrita como:

$$R = [a,b] \times [h_1(x), h_2(x)] \text{ com } h_1 \text{ e } h_2 \text{ contínuas.}$$

Uma região S do plano é de tipo 2 se S pode ser descrita como:

$$S = [h_1(y), h_2(y)] \times [c,d] \text{ com } h_1 \text{ e } h_2 \text{ contínuas.}$$

Veja a figura:



Teorema 4.2.2. *Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua no interior de R região de tipo 1 ou 2. Então a integral dupla $\int_R f(x,y)\, dA$ existe e pode ser calculada via integral iterada.*

Aplicação 4.2.1. *Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região de tipo 1 ou 2, então a área de R, $A(R)$ pode ser obtida via: $A(R) = \int_R dA$*

Demonstração 4.2.1. Seja R de tipo 1, *i.e.*, $R = [a,b] \times [h_1(x), h_2(x)]$ com h_1 e h_2 contínuas. Então , $A(R) = \displaystyle\int_a^b [h_2(x) - h_1(x)]\,dx = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy\,dx = \int\limits_R dA$.
Da mesma forma, caso R seja de tipo 2, *i.e.*, $R = [h_1(y), h_2(y)] \times [c,d]$ com h_1 e h_2 contínuas, então , $A(R) = \displaystyle\int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\,dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy = \int\limits_R dA$.

Teorema 4.2.3. *Se R é uma região limitada do plano xy, bordo de um caminho simples fechado e suave por partes e $h_1, h_2 : R \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas com $h_1 \le h_2$, então o volume do sólido S de $\mathbb{R}^3$ dado por $S = R \times [h_1(x,y), h_2(x,y)]$ é $V(S) = \displaystyle\int\limits_S (h_2 - h_1)\,dA$.*

Exemplo 4.2.1. Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a, b, c > 0$.

***S**olução* . O sólido está compreendido entre os gráficos de $h_1(x,y) = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$ e $h_2(x,y) = -h_1(x,y)$. Considere portanto $R = \{(x,y); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\}$. Então

$$V = \int\limits_R dV = \int\limits_R (h_1(x,y) - h_2(x,y))\,dA = 2\int\limits_R h_1(x,y)\,dA.$$

Seja $S = \{(x,y); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$. Então , por simetria, $V = 8\displaystyle\int\limits_R h_1(x,y)\,dA$, logo

$$V = 8c \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

Seja $A(x) = 8c\displaystyle\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$. Então , $V = \displaystyle\int_0^a A(x)\,dx$. Usando a mudança de variáveis $t = \sqrt{1 - x^2/a^2})$, temos que $A = 8c\displaystyle\int_0^{bt} \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$. Agora escolhendo $y = bt\,\mathrm{sen}(\theta)$, temos que $dy = bt\cos(\theta)\,d\theta$ e

$$\begin{aligned} A &= 8c\int_0^{\pi/2} bt^2\cos^2(\theta)\,d\theta = 4cbt^2\int_0^{\pi/2} (\cos(2\theta) + 1)\,d\theta \\ &= 2bct^2\pi = 2bc\pi\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Assim, $V = \displaystyle\int_0^a 2bc\pi\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc$.

4.3 Coordenadas Polares

É usual representar um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por (r, θ) onde $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Assim, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arccos(x/r)$ ou $\theta = \mathrm{arcsen}(y/r)$ ou ainda, $\theta = \arctan(y/x)$. Note que de fato, o que está sendo feito é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\longrightarrow (0,\infty) \times [0, 2\pi) \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

com inversa

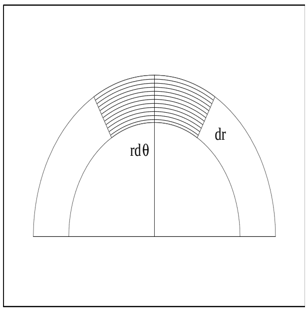
$$\begin{aligned} g = f^{-1} : (0,\infty) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\longmapsto g(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) = (x, y) \end{aligned}$$

Observe que a derivada de g é :

$$g'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r(r,\theta) & x_\theta(r,\theta) \\ y_r(r,\theta) & y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e portanto, $\det(g'(r, \theta)) = r$.

Estamos exigindo que $(x, y) \neq (0, 0)$ (ou seja $r \neq 0$) para que essa mudança de variáveis seja invertível. De fato a mudança inclui a origem, mas não é diferenciável aí. Além disso, fica "difícil" saber que valor de θ associar ao ponto $(x, y) = (0, 0)$. Veja na figura abaixo, que uma região de lados $\Delta r \Delta \theta$ corresponde a uma figura aproximadamente retangular no plano xy. A área da imagem deve ser aproximadamente $r\,\Delta\, r\,\Delta\,\theta$.



Exemplo 4.3.1. Seja R a região $R = \left\{(r, \theta); -\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{t}{2} \leq r \leq t\right\}$ (esboçada acima). Obtenha a área de R.

Solução . A área A desejada é a do anel circular de raios t e $t/2$ e ângulo central $\frac{\pi}{3}$. Assim, $A = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^2}{8}\right) = \dfrac{\pi\, t^2}{8}$ e note que $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\int_{t/2}^{t} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi\, t^2}{8}$.

Lembre que para funções de uma variável, f e g com $f \in C^0$ e $g \in C^1$, $\int f(u)\, du = \int (f \circ g)\, g' dx$. Veremos mais tarde que isso pode ser generalizado para funções de duas variáveis assim: $f : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^0$, $g : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, g \in C^1$, g injetora, então

$$\int_{R_u} f(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 = \int_{R_v} f \circ g(v_1, v_2)\, \left|\det(g')\right|\, dv_1\, dv_2.$$

No caso de g ser mudança para coordenadas polares, temos que:

$$\int\limits_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{R_{r\theta}} f\circ g(r,\theta)\,\left|\det(g')\right|\,dr\,d\theta$$

Exemplo 4.3.2. Calcule a integral $\displaystyle\int\limits_{R_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, onde $R_{xy} = \{(x,y); x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

***S**olução* . R_{xy} pode ser descrita em coordenadas polares como: $R_{r\theta} = \{(r,\theta); r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Logo:

$$\int\limits_{R_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{R_{r\theta}} r\,\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r\,\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi\,a^3}{6}.$$

Apêndice A

Formas Quadráticas e Quádricas

A.1 Um comentário sobre matrizes simétricas

Exemplo A.1.1. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Obtenha P tal que PAP^t é diagonal e $\det(P) = \pm 1$.

Solução *.* Vamos denotar por L_k a k-ésima linha de A. Se fôssemos fazer eliminação Gaussiana em A, o primeiro passo seria trocar L_2 por $L_2 - \dfrac{L_1}{2}$ e L_3 por $L_3 + \dfrac{L_1}{2}$. Isso é equivalente a multiplicar A Ã esquerda por $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observe que P_1 é triangular inferior e que $\det(P_1) = 1$. Como queremos manter a simetria, vamos então fazer $A_1 = P_1 A {P_1}^t$. Note que A_1 também é simétrica,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora, para fazer eliminação Gaussiana em A_1, deveríamos trocar a terceira linha de A_1 por sua terceira linha menos sua segunda linha, *i.e.*, deveríamos multiplicar A_1 Ã esquerda por $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. De novo, note que $\det(P_2) = 1$. Vamos fazer $A_2 = P_2 A_1 {P_2}^t = P_2 P_1 A {P_1}^t {P_2}^t$.

Assim,

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $PAP^t = A_2$ é diagonal e que $\det(P) = 1$.

Exemplo A.1.2. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Obtenha P tal que PAP^t é diagonal e $\det(P) = \pm 1$.

***Solução* .** Para fazer eliminação Gaussiana em A, o primeiro passo seria trocar L_2 por L_1 e vice-versa, já que o coeficiente a_{11} de A é nulo. Isso é equivalente a multiplicar A Ã esquerda por $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observe que $\det(P_1) = -1$ e que ${P_1}^t = P_1$. Vamos então fazer $A_1 = P_1A{P_1}^t = P_1AP_1$. Note que A_1 também é simétrica,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora, para fazer eliminação Gaussiana em A_1, deveríamos trocar a segunda linha de A_1 por sua segunda linha menos $\frac{2}{3}$ da primeira e sua terceira linha por sua terceira linha menos $\frac{1}{3}$ de sua primeira linha, *i.e.*, deveríamos multiplicar A_1 Ã esquerda por $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De novo, note que $\det(P_2) = 1$. Vamos fazer $A_2 = P_2 A_1 {P_2}^t = P_2 P_1 A {P_1}^t {P_2}^t$. Assim,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & -8/3 & 14/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & -8/3 & 14/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Agora fazemos $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_3 = P_3 A_2 {P_3}^t$. De novo, note que $\det(P_3) = 1$ e

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & -8/3 & 14/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $P = P_3 P_2 P_1$, temos que $PAP^t = A_3$ é diagonal e que $\det(P) = -1$.

O que foi feito nos dois exemplos acima é geral:

Lema A.1.1. *Seja A uma matriz nxn simétrica. Então existe P matriz nxn tal que:*

1. *PAP^t é diagonal e*
2. $\det(P) = \pm 1$.

A.2 Formas canônicas de polinômios

Seja $p(x, y, z) = \alpha x^2 + 2\beta xy + 2\delta xz + \gamma y^2 + 2\epsilon yz + \theta z^2 + \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z + \zeta$. Note que esse polinômio pode ser reescrito como:

$$p(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \zeta$$

Escrevendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \theta \end{pmatrix}$ e $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$, temos que $p(u) = u^t A u + \eta^t u + \zeta$. Como A é simétrica, existe P e D tal que $PAP^t = D$ com D diagonal e $\det(P) = \pm 1$. Seja v tal que $u = P^t v$. Assim,

$$\begin{aligned} p(u) &= p(P^t v) \\ &= (P^t v)^t A P^t v + \eta^t P^t v + \zeta \\ &= v^t P A P^t v + \eta^t P^t v + \zeta \\ &= v^t D v + (P\eta)^t v + \zeta \\ &= v^t D v + \omega c + \zeta, \quad \omega = P\eta \end{aligned}$$

Definição A.2.1. Dizemos que um polinômio está em forma canônica se está escrito como

$$p(v) = v^t D v + w^t v + \zeta,$$

onde $v, w \in \mathbb{R}^n$ e D é uma matriz nxn diagonal.

Observação :

Note que, se $d_k \neq 0$, é possível ainda fazer outra mudança de variáveis, para acabar com o termo $w_k v_k$. Por exemplo, caso $d_1 \neq 0$, faça $X = \sqrt{|d_1|} v_1 + \operatorname{sgn}(\frac{w_1}{d_1})\sqrt{|\frac{w_1}{d_1}|}$. Isso porém não é tão relevante quanto acabar com os termos cruzados (e nem sempre é possível fazer isso).

Exemplo A.2.1. Seja $p(x, y, z) = 4x^2 + 2xy - 2xz + 3y^2 + 2yz + 5z^2$. Escreva p em forma canônica.

S*olução .* Esse polinômio pode ser reescrito como

$$p(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Note que a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ é a matriz A do exemplo A.1.3 e portanto, satisfaz $PAP^t = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Assim, $A = P^{-1} D P^{-1^t}$ e

$$p(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P^{-1} D P^{-1^t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Seja $v = P^{-1^t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, isto é, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^t v$ Então

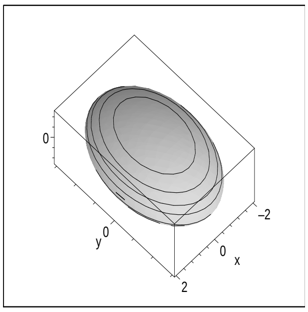
$$p(x, y, z) = p(v^t P) = v^t D v = 4{v_1}^2 + 2{v_2}^2 + 3{v_3}^2$$

A.3 Superfícies dadas implicitamente por uma equação do segundo grau em 3 variáveis e suas degenerações

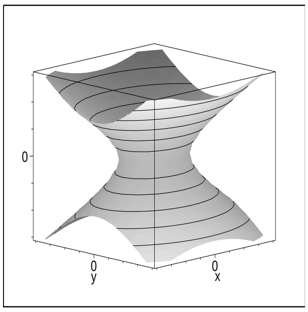
Dado um polinômio de grau 2 em n variáveis, o conjunto $S(p) = \{x \in \mathbb{R}^n; p(x) = 0\}$ é chamado de *quádrica* ou *forma quadrática*. Vamos estudar o conjunto $S(p)$ no caso que $n = 3$. É usual, ao estudar $S(p)$, discutir primeiro o caso em que o polinômio está em forma canônica.

No que se segue, a, b e c não são nulos.

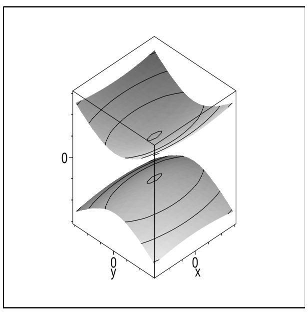
Exemplo A.3.1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, esfera caso $a = b = c$, elipsóide caso contrário:



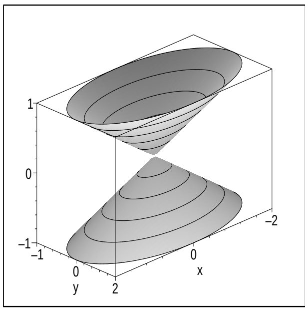
Exemplo A.3.2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, hiperbolóide de uma folha:



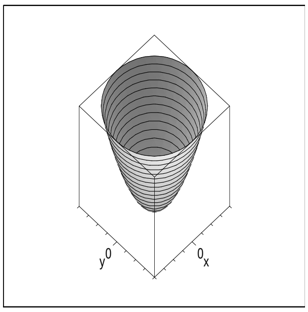
Exemplo A.3.3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, hiperbolóide de duas folhas:



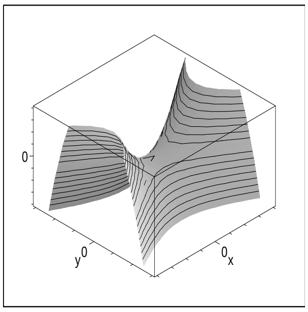
Exemplo A.3.4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, cone de duas folhas:



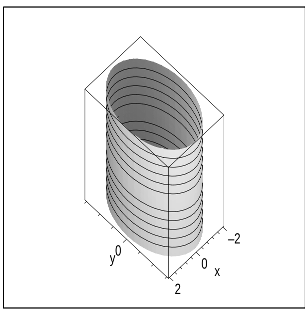
Exemplo A.3.5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$, parabolóide elíptico ou circular (caso $a = b$):



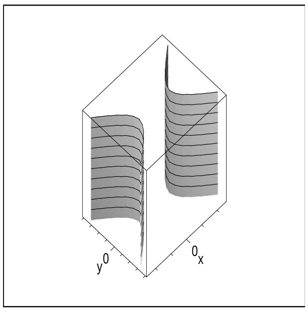
Exemplo A.3.6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$, parabolóide hiperbólico (sela):



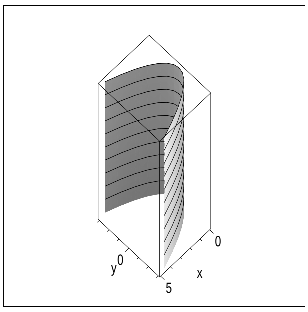
Exemplo A.3.7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cilindro elíptico ou circular (caso $a = b$):



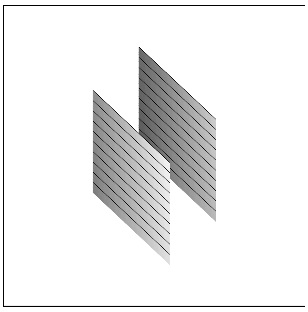
Exemplo A.3.8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cilindro hiperbólico:



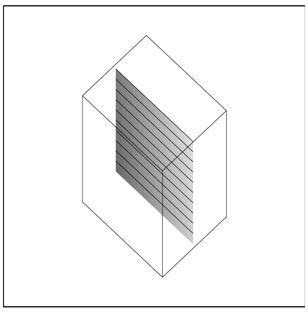
Exemplo A.3.9. $y^2 - 2px = 0$, cilindro parabólico:



Exemplo A.3.10. $x^2 - a^2 = 0$, par de planos paralelos:

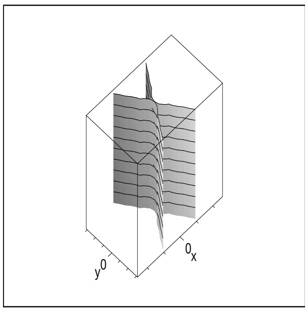


Exemplo A.3.11. $x^2 = 0$, plano:

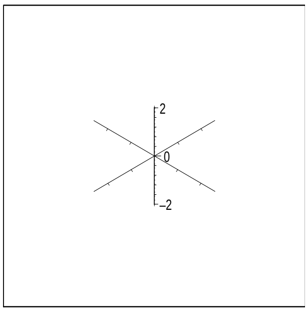


Note que nem sempre o conjunto $S(p)$ define uma superfície. Veja:

Exemplo A.3.12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, par de planos se interceptando em uma reta:



Exemplo A.3.13. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, uma reta (eixo z):



Exemplo A.3.14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, ponto; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ e $x^2 + a^2 = 0$, vazio